Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

19. Dezember 2006

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 9

Gruppenübung

G 26 (*QR–Zerlegung*)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist R aus einer QR–Zerlegung der Matrix A entstanden?

G 27 (*Lineare Ausgleichsprobleme*)

Ein Wagen werde aus dem Stand innerhalb von 10 Sekunden auf seine Fahrgeschwindigkeit von 100 km/h beschleunigt. Die Geschwindigkeit des Wagens nach 3 Sekunden betrage 29 km/h und nach 6 Sekunden 63 km/h. Aus $v(t) = a \cdot t$ soll mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die Beschleunigung a bestimmt werden. Hierbei bezeichne v die Geschwindigkeit und t die Zeit.

1. Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf.
2. Leiten Sie die Normalgleichung her, und berechnen Sie die Beschleunigung.
3. Bestimmen Sie die Norm des Residuums.

G 28 (*Householdermatrix*)

Man gebe u an, so daß

$$Q = I - \frac{2}{u^T u} u u^T$$

den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auf ein Vielfaches des ersten Koordinateneinheitsvektors transformiert. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis.

Hausübung

H 25 (*Lineares Ausgleichsproblem*)

Gegeben sei eine Tabelle von Messwerten:

i	1	2	3	4
t_i	1	2	3	4
y_i	1	2	2	3

Zur Approximation der "Punktwolke" (t_i, y_i) soll der Ansatz $x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ verwendet werden.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_3$ und die Matrix Φ.

b) Stellen Sie das Normalgleichungssystem auf und lösen Sie es mit einem geeigneten Verfahren.

c) Skizzieren Sie die Lösung.

d) Berechnen Sie die 2-Norm des Residuums $\vec{r}$.

H 26 (*Ausgleichsproblem mit trigonometrischen Ansatzfunktionen*)

Lineare Ausgleichsrechnung ist auch mit anderen Funktionen als Polynomen möglich. Bestimmen Sie die Parameter x_1, x_2, x_3 in dem Ansatz

$$H(t) = x_1 + x_2 \sin \frac{2\pi t}{12} + x_3 \cos \frac{2\pi t}{12}$$

so, dass $H(t)$ die Daten

t_i	0	2	4	6	8	10
$m(t_i)$	1	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut approximiert. Benutzen Sie die Normalgleichung.

H 27 (*Programmieraufgabe: Householder-Faktorisierung*)

Der radioaktive Zerfall einer Substanz, die aus zwei Isotopen besteht, lässt sich durch die Funktion

$$y(t, w_0, w_1) = w_0 \cdot \exp(-\lambda_0 \cdot t) + w_1 \cdot \exp(-\lambda_1 \cdot t)$$

beschreiben. Die Zerfallskonstanten seien

$$\lambda_0 = 0.8004419910164 \quad \text{und} \quad \lambda_1 = 0.52068619687912 \cdot 10^{-1}.$$

Gesucht sind die Konzentrationen w_0 und w_1 der beiden Isotope, die linear in die Zerfallskurve eingehen. Um diese zu ermitteln, werden zu $m = 25$ verschiedenen Zeitpunkten $t_i = i$, $i = 1, \ldots, m$, Messungen y_i der Zerfallskurve y durchgeführt:

$$\begin{aligned}(y_1, \ldots, y_m) = (&15.51, 7.76, 4.24, 2.62, 1.85, 1.48, 1.28, 1.15, 1.07, 1.00, 0.95, 0.90,\\ &0.85, 0.81, 0.77, 0.73, 0.69, 0.65, 0.62, 0.59, 0.56, 0.53, 0.50, 0.48, 0.46).\end{aligned}$$

Die gesuchten Konzentrationen $w := (w_0, w_1)^T$ werden nun mit Hilfe der Forderung, dass

$$F(w) := \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{m} (y(t_i, w) - y_i)^2$$

minimal wird, bestimmt.

Lösen Sie dieses lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe einer Householder-Faktorisierung!
Mögliche Abgabe:

1. Lösung w_* des LAP und $F(w_*)$
2. Graphischer Ausdruck der Daten und der Ausgleichskurve in einem Diagramm
3. Programmquelltext

Abgabetermin:	Dienstag, 9. Januar 2007
Programmieraufgabe:	bis zum 9. Januar 2007.