Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Dezember 2006

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 8

Gruppenübung

G 22 (*LR-Zerlegung von Tridiagonalmatrizen*)

Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus ohne Pivotsuche eine LR-Zerlegung der Matrix $A = LR$.

b) Wieviele Matrixelemente müssen allgemein eliminiert werden, wenn man den Gauß-Algorithmus ohne Pivotsuche auf eine Tridiagonalmatrix anwendet?

c) Welche Besetzungsstruktur haben L^{-1}, R^{-1} und A^{-1} in unserem Beispiel?

G 23 (*Einheitssphären von Normen*)

a) Skizzieren Sie die Einheitssphäre $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ im $\mathbb{R}^2$ zu der euklidischen Norm $\|x\|_2$, der Maximumnorm $\|x\|_\infty$ und der Summennorm $\|x\|_1$.

b) Skizzieren Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Menge $\{Ax \mid \|x\|_\infty = 1\}$.

Hinweis: Eine lineare Abbildung wie z.B. $x \to Ax$ bildet Geraden auf Geraden ab. Der Schnittpunkt zweier Geraden wird auf den Schnittpunkt ihrer Bildgeraden abgebildet.

c) Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$ der Matrix A bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

d) Veranschaulichen Sie diese Konditionszahl mit Hilfe der Skizze aus Aufgabenteil b) und unter Verwendung von

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty \text{ und } \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}.$$

G 24 (*Untere Schranke für die Konditionszahl*)

Bei einem linearen Gleichungssystem für 3 Unbekannte erhielt man folgende Resultate (bei exakter Rechnung):

$$Ax_1 = b_1 \quad b_1 = (0.9, 0.7, 0.6)^T \quad x_1 = (1.0, -1.2, 1.3)^T$$

$$Ax_2 = b_2 \quad b_2 = (0.901, 0.698, 0.601)^T \quad x_2 = (1.0, -2.0, 2.0)^T$$

Geben Sie eine untere Schranke für die Konditionszahl von A in $\|.\|_\infty$ an.

G 25 (*Cholesky-Zerlegung*)

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Cholesky–Zerlegung von A. Ist die Matrix positiv definit?

Hausübung

H 22 (*Spektralradius und Matrixnormen*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -100 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Spektralradius

$$\rho(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|\lambda| : \det(A - \lambda I) = 0\}$$

sowie die Matrixnormen $\|A\|_\infty, \|A\|_1, \|A\|_2$.

H 23 (*Verwendung der Zerlegung für Invertierbarkeit*)

Zeigen Sie, dass folgende Matrizen invertierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & -0.8 \\ 0.5 & 1 & 0.1 \\ 0.3 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

H 24 (*Programmieraufgabe: Direkte Löser für LGS*)

(Sie können aber auch alternativ sich das NumaWWW anschauen: unter
`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/`
können Sie im Bereich "Lineare GS" den Gauß-Algorithmus mit und ohne Pivotsuche benutzen oder auch sich die Beispiele für Cholesky-Zerlegung anschauen)

Zu lösen sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$. Schreiben Sie jeweils ein `matlab`–Programm, das

a) die LR–Zerlegung ohne Spaltenpivoting,

b) die LR–Zerlegung mit Spaltenpivoting, bzw.

c) die Cholesky–Zerlegung

der Koeffizientenmatrix A berechnet und als Ausgabe die untere Dreiecksmatrix L, die obere Dreiecksmatrix R und – falls nötig – die Permutationsmatrix P liefert. Nehmen Sie an, dass A jeweils die nötigen Voraussetzungen für die Existenz der Zerlegungen erfüllt. Testen Sie ihre Programme an dem folgenden Beispiel. Gegeben sei die Hilbertmatrix H, $H_{ij} = 1/(i+j-1)$ für $i, j = 1, .., n$ und die rechten Seite $b = e_1$ mit $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$. Die exakte Lösung ist durch

$$x_i = (-1)^{i+1} i \binom{n+i-1}{n-1} \binom{n}{n-i}$$

gegeben. Vergleichen Sie den relativen Fehler Ihrer berechneten Lösung $\tilde{x}$ von $Hx = e_1$ für $n = 1, \dots, 12$ mit der Kondition der Matrix. Erzeugen Sie dazu ein Diagramm mit logarithmisch skalierter y–Achse. Tragen Sie sowohl den relativen Fehler Δx_{rel} der berechneten Lösung als auch die Kondition $\mathrm{cond}_2(H)$ der Hilbertmatrix in der euklidischen

Norm ein. Was beobachten Sie und wie erklären Sie die Ergebnisse?

Hinweis: Sie erhalten eine Hilbertmatrix mit dem Befehl `hilb`. Ein halblogarithmisches Diagramm läßt sich mit `semilogy` erzeugen. Der Befehl `norm` liefert die euklidische Länge eines Vektors und `cond` gibt die euklidische Kondition einer Matrix aus.
Versuchen Sie Ihre `matlab`–Programme effizienter zu machen, indem Sie vektororientiert programmieren.

Abgabetermin:	Dienstag, 19. Dezember 2006
Programmieraufgabe:	bis zum 26. Dezember 2006.