Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28. November 2006

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 6

Gruppenübung

G 16 (*A–Stabilität*)

Zur Lösung des AWP

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = x_0$$

werde das implizite Verfahren

$$x_{k+1} = x_k + \tau\,\left((1-\sigma)f(t_k,x_k) + \sigma\, f(t_{k+1},x_{k+1})\right), \quad \sigma \in (0,1)$$

benutzt. Für welche σ ist das Verfahren A–stabil?

G 17 (*Explizites und implizites Euler-Verfahren*)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(t) = -3y(t) + 1 + 3t, \qquad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie mit dem expliziten und impliziten Eulerverfahren jeweils eine Näherung von $y(t)$ im Intervall $[0,4]$ mit Schrittweite $h = 1$.

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung

$$y(t) = t + e^{-3t}.$$

Können Sie einen Grund für das unterschiedliche Verhalten nennen? (Beide Verfahren haben Konsistenzordnung 1.)

G 18 (*Gerschgorin*)

Die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 60 & -120 & 1 \\ 0.1 & 1 & -10000 \end{bmatrix}$$

soll mit dem expliziten Eulerverfahren integriert werden. Wie groß kann die Diskretisierungsschrittweite h gewählt werden, wenn bei beliebigem $y_0 = y_0^h$ die Bedingung $y_i \to 0$ für $i \to \infty$ mit $h > 0$ erfüllt sein soll? Begründen Sie Ihre Wahl.

Hausübung

H 16 (*Stabilität*)

Es sei das folgende zweistufige Runge–Kutta–Verfahren gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion und überprüfen Sie, ob das Verfahren A-stabil ist.

b) Berechnen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens für die DGL $y' = \lambda y,\ \lambda < 0$.

H 17 (*Kreissatz von Gerschgorin*)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.7 & 0 \\ -0.7 & 5 & -0.7 \\ 0 & -0.7 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie, warum die Eigenwerte von A reell sind und geben Sie mit dem Kreissatz von Gerschgorin Intervalleinschließung für die Eigenwerte an.

b) Führen Sie eine Ähnlichkeitstransformation auf die Matrix $B = S^{-1} A\, S$ mit einer Diagonalmatrix $S = \operatorname{diag}(1, \delta, \delta^2)$ durch. Dabei bleiben die Eigenwerte unverändert. Wählen Sie verschiedene Werte für $\delta > 0$, die zur Verbesserung der Eigenwertabschätzung mit Hilfe des Kreissatzes von Gerschgorin geeignet sind. Versuchen Sie insbesondere möglichst kleine, disjunkte Intervalle für $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ anzugeben.

H 18 (*Programmierübung: MATLAB oder NumaWWW*)

Zu lösen sei das folgende AWP

$$\dot{x} \;=\; -12x, \quad x \in [0, 1],\ x(0) = 1$$

mit den Schrittweiten $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$.

a) Implementieren sie dazu das explizite EULER-Verfahren.

b) Implementieren sie dazu das implizite EULER-Verfahren.

c) Geben sie die Ergebnisse dazu jeweils graphisch aus.

Abgabetermin:	Dienstag, 05. Dezember 2006
Programmieraufgabe:	bis zum 12. Dezember 2006.