Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21. November 2006

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 5

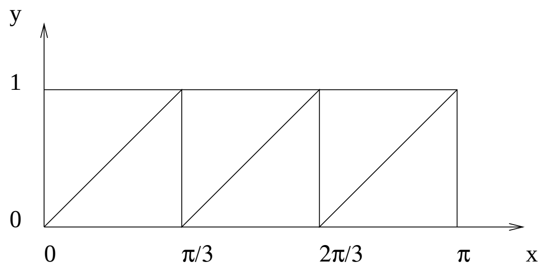
Gruppenübung

G 13 (*Mehrdimensionale Quadratur mittels Schwerpunktregel*)

Bestimmen Sie mit der Schwerpunktregel eine Näherung des Integrals

$$I = \int_0^1 \int_0^\pi \frac{e^y}{1 + \cos(2x) + \cos(y)}\, dx\, dy$$

unter Verwendung der Zerlegung



G 14 (*Verschiedene Verfahren*)

Man betrachte das Anfangswertproblem $y' = f(x, y), y(a) = y_a$ mit

$$f(x, y) = -2xy^2 \quad \text{und} \quad a = 1, y_a = \frac{1}{2}.$$

Approximieren Sie die Lösung des gegebenen Problems mit jeweils einem Schritt:

a) des Euler-Verfahrens (vorwärts),

b) des Heun-Verfahrens,

c) des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung

unter Verwendung der Schrittweite $h = 0.1$ und vergleichen Sie die Resultate mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Stellen Sie für die betrachteten Verfahren das jeweilige Butcher-Schema auf.

G 15 (*Konsistenzordnung explizites Euler–Verfahren*)

Zeigen Sie, daß das explizite Euler–Verfahren konsistent von der Ordnung 1 ist.

Hausübung

H 13 (*Transformation auf das Standarddreieck, Formel von Collatz und Albrecht*)
Verwenden Sie die Formel von Collatz und Albrecht

$$\int_{T_0} f(x,y)\;dxdy \approx \frac{1}{60}\left[f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},0) + f(0,\frac{1}{2})\right] + \frac{9}{60}\left[f(\frac{1}{6},\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{6},\frac{4}{6}) + f(\frac{4}{6},\frac{1}{6})\right]$$

um die Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$ auf dem Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,1)$, $(3,0)$ und $(4,4)$ zu integrieren.

H 14 (*Konsistenzordnung des impliziten Euler-Verfahrens*)

Zeigen Sie, daß das implizite Euler–Verfahren konsistent von der Ordnung 1 ist.

Hinweis: Verwenden Sie, daß η_1 durch die Gleichung $\eta_1 = y_0 + hf(t_1, \eta_1)$ wohldefiniert ist (für h hinreichend klein), oder verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.

H 15 (*MATLAB, OCTAVE oder NUMAWWW: Das Räuber-Beute Modell*)

Ein einfaches Modell zur Berechnung von Populationen ist das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha x + \beta xy \\ y'(t) &= \gamma y + \delta xy \end{aligned}$$

Dabei stellt x bzw. y die jeweilige Anzahl an Kreaturen der einzelnen Arten dar. Programmiere das Standard-Runge-Kutta-Verfahren mit den Parametern

$$\alpha = \frac{1}{4}\,,\ \beta = -\frac{1}{100}\,,\ \gamma = -1\,,\ \delta = \frac{1}{100}\,,$$

den Startwerten

$$x_0 = 80\,, \quad y_0 = 30$$

und den Schrittweiten $h = 1,\ 0.5,\ 0,1$. Vergleiche die jeweiligen Ergebnisse mit dem expliziten Euler-Verfahren zur gleichen Schrittweite. Plotte dazu jeweils die Koordinaten (x_j, y_j). Die Rechnungen sollen jeweils auf dem Zeitintervall $[0,20]$ ausgeführt werden.

Hinweis zur Kontrolle: In MATLAB können Sie Ihre Ergebnisse auch mit dem standardmßig implementierten Standard-Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 vergleichen (*ode45*).

Abgabetermin:	Dienstag, 28. November 2006
Programmieraufgabe:	bis zum 05. Dezember 2006.