Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. November 2006

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 4

Gruppenübung

G 10 (*Gauss-Quadratur*)

Die mittlere Temperatur der Sonneneinstrahlung am 21. Juni sei definiert durch:

$$\tau_m = \frac{1}{\mathrm{SU} - \mathrm{SA}} \int_{\mathrm{SA}}^{\mathrm{SU}} \tau(t)\, dt$$

$\tau(t)$	Temperatur zur Zeit t
SA$= 5^{00}$	Sonnenaufgang
SU$= 22^{00}$	Sonnenuntergang

τ_m soll aus nur drei Tagestemperaturen ermittelt werden. Wann sind die Temperaturen zu messen, um ein möglichst optimales Ergebnis zu erhalten?

Hinweis: Die Wahl der Meßzeitpunkte gemäß Gauß-Quadratur mit Legendre-Polynomen (siehe Tabelle Vorlesung) liefert maximale Approximationsordnung.

G 11 (*Summierte Trapezregel.*)

Das Integral

$$A = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx$$

soll mit der summierten Trapezregel berechnet werden. Der dabei auftretende Fehler soll kleiner als 0,0001 sein. Wie klein muss dazu die Schrittweite h gewählt werden? Wieviele Funktionsauswertungen sind dazu nötig? Wieviele sind nötig, wenn die Symmetrie des Integranden berücksichtigt wird?

G 12 (*Adaptive Quadratur mit Simpson–Regel*)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+256x^2}$. Es soll mittels adaptiver Quadratur und unter Verwendung der Simpsonformel das Integral über $f(x)$ in den Grenzen von 0 bis 1 bestimmt werden. Als Vorschlagsschrittweite für den ersten Schritt sei $H_0 = \frac{1}{4}$ gegeben. Untersuchen Sie ob diese Schrittweite akzeptabel ist, wenn eine Fehlertoleranz von $\epsilon = 10^{-3}$ gefordert wird.

Hinweis: Gehen Sie analog zu der Darstellung im Skript vor.

Hausübung

H 10 (*Summierte Trapezregel*)

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{2+\sin(10\pi x)}dx \approx 1.154700538$$

numerisch mit der summierten Trapezregel $T(h)$ und summierten Simpsonregel $S(h)$. Verwenden Sie in beiden Fällen $h = 0.125$ und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Tabelle der Funktionswerte:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	1.000	0.375	1.5469181	0.75	2.0000000
0.125	1.5469183	0.5	1.0000003	0.875	0.7387964
0.25	0.6666667	0.625	0.7387961	1.0	0.9999993

H 11 (*Gauss-Quadratur und Fehler*)

Berechnen Sie mit der 3-Punkt Gauß-Quadratur-Formel näherungsweise das Integral

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t}dt,$$

und schätzen Sie den Quadraturfehler ab.

Hinweis: $\left|\frac{d^6}{dt^6}\frac{e^t}{t}\right| \leq 190$ für $t \in [2,3]$.

H 12 (Adaptive Simpson-Quadratur)

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^{64}}$$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{(x-3)^2+0.01} + \frac{1}{(x-9)^2+0.04} - 6$$

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < \pi, \\ 1, & x \geq \pi. \end{cases},$$

gesucht sind Approximationen von

$$\int_{-10}^{10} f(x)dx, \quad \int_{-2}^{2} g(x)dx, \quad \int_{-4}^{4} u(x)dx \text{ und } \int_1^5 v(x)dx.$$

Implementieren Sie dazu eine MATLAB Routine, die mit der in der Vorlesung behandelten Schrittweitenkorrektor arbeitet. Die Routine soll das Simpson Verfahren verwenden. Visualisieren Sie den Verlauf der Schrittweiten.
Hinweis: $u(x)$ entspricht der MATLAB Funktion `humps`.

Abgabetermin:	Dienstag, 21. November 2006
Programmieraufgabe:	bis zum 28. November 2006.