Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

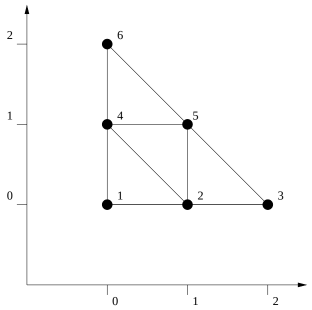
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. November 2006

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 3

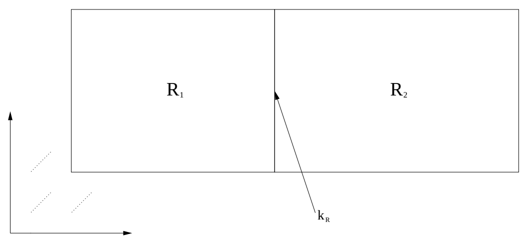
Gruppenübung

G 7 (*Lineare Interpolation in 2D*)
Wie lautet die Basisfunktion φ der stückweise linearen stetigen Interpolation zum Knoten Nr. 4 der unten angegebenen Triangulation ?



$$\varphi(P_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

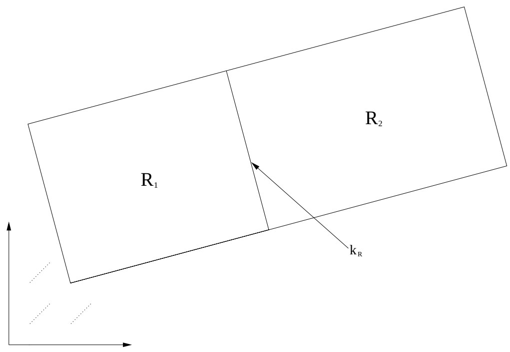
G 8 (*Bilineare Interpolation*)
Gegeben seien zwei achsenparallele Rechtecke R_1 und R_2, die genau eine Kante k_R gemeinsam haben. Weiterhin seien auf R_1 bzw. R_2 bilineare Polynome p_1 bzw. p_2 gegeben, die auf den Rechtecksecken gegebene Werte interpolieren.



a) Zeigen Sie, daß p_1 und p_2 in k_R stetig ineinander übergehen.

b) Gehen p_1 und p_2 in k_R notwendigerweise differenzierbar ineinander über?

c) Betrachten Sie nun beliebige Rechtecke R_1 und R_2, die genau eine Kante k_R gemeinsam haben. Ist der Übergang nun immer noch stetig?



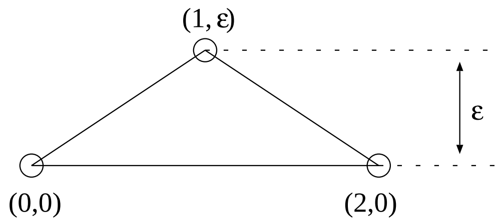
G 9 (*Trapez– und Simpsonregel*)

Berechnen Sie Näherungen für die beiden folgenden bestimmten Integrale mit der Trapez– bzw. der Simpsonregel und vergleichen Sie mit den exakten Werten:

$$\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \; dx, \qquad \int_0^2 \frac{2}{x^2+4} \; dx.$$

Hausübung

H 7 (*Lineare Interpolation in 2D*)
Gegeben sei eine Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ und das Dreieck mit den Ecken $(0,0), (2,0), (1,\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$.



a) Interpolieren Sie die Funktion f durch eine (affin) lineare Funktion $l_\varepsilon(x,y) = ax + by + c$, wobei die Stützstellen gleich den Ecken des Dreiecks sind.

b) Berechnen Sie den Fehler $\|\nabla f(1,0) - \nabla l_\varepsilon(1,0)\|$. Wie verhält sich der Fehler für $\varepsilon \to 0$? Vergleichen Sie dies mit der Fehlerabschätzung aus Satz 1.4.2.

H 8 (*Transformation des Integrationsbereichs*)
Gegeben sei die Quadratur-Formel

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{8}\left(f(-1) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1)\right).$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Quadratur-Formel eine Näherung für das Integral

$$\int_3^4 \frac{1}{x} dx.$$

H 9 (*Numerische Quadratur*)
Schreiben Sie zwei Funktionen für die numerische Quadratur, die die zusammengesetzte Trapezregel bzw. die zusammengesetzte Simpson-Regel implementieren. Als Eingabe sollen die Intervallgrenzen a und b und die Anzahl n der äquidistanten Knoten übergeben werden.
Testen Sie die Programme an den bestimmten Integralen

$$\int_0^\pi \sin x \; dx, \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{10^{-2} + x^2} \; dx.$$

Lassen Sie n variieren und zeichnen Sie Diagramme für den Fehler der beiden Verfahren. Wie groß müsste n in den beiden Fällen jeweils sein, um einen vorgegebenen absoluten Fehler von maximal $\epsilon = 10^{-6}$ bei der Trapez– bzw. Simpson–Regel zu gewährleisten? Wie oft muss dabei der Integrand ausgewertet werden?

Wenden Sie die Trapezregel auch auf das Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin(25x)^2 \; dx$$

an. Was beobachten Sie?

Abgabetermin: Dienstag, 14. November 2006
Programmieraufgabe: bis zum 21. November 2006.