Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

31. Oktober 2006

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 2

Gruppenübung

G 4 (*Splines*)

Kreuzen Sie die richtigen Feststellungen an und begründen Sie ihre Antworten.

a) ☐ Eine kubische Splinefunktion ist das Polynom dritten Grades, das durch die Daten $(x_i, y_i) \quad (i = 0, \dots, n)$ eindeutig bestimmt ist.

☐ Eine kubische Splinefunktion ist zweimal stetig differenzierbar und stimmt auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, \dots, n-1)$ mit einem Polynom dritten Grades überein.

b) ☐ Für die Eindeutigkeit eines interpolierenden kubischen Splines ist die ausschließliche Kenntnis aller Datensätze $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ nicht ausreichend.

☐ Mit vier Daten $(x_0, y_0), \dots, (x_3, y_3)$ ist ein interpolierender kubischer Spline bereits eindeutig bestimmt.

☐ Ein interpolierender kubischer Spline auf $[x_0, x_n]$ mit den Nebenbedingungen $s'(x_0) = f'(x_0)$ und $s'(x_n) = f'(x_n)$ kann bereits eindeutig berechnet werden.

G 5 (*Kubischer Spline?*)

Gegeben sei die Funktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 & \text{für} \quad -2 \le x < -1 \\ -3x^3 - 6x^2 + 4 & \text{für} \quad -1 \le x < 0 \\ 3x^3 - 6x^2 + 4 & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 & \text{für} \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man prüfe, ob Φ ein kubischer Spline ist.

G 6 (*Natürlicher Spline*)

Stellen Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung des natürlichen interpolierenden kubischen Spline zu den gegebenen Daten auf.

x_i	-3	-2	0	1	2
y_i	0	2	2	11	18

Hausübung

H 4 (*Denkaufgabe*)

Sei φ_f der natürliche interpolierende kubische Spline zur Funktion f. Wie lautet der natürliche interpolierende kubische Spline φ_g zur Funktion g mit $g(x) = f(x) + ax + b$?

H 5 ($C^1(\mathbb{R})$-*Eigenschaft*)

Kann man $p_1, p_2 \in \Pi_2$ so wählen, daß die Funktion

$$s(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad -\infty \leq x < -1 \\ p_1(x) & \text{für} \quad -1 \leq x < 0 \\ p_2(x) & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

aus $C^1(\mathbb{R})$ ist?

H 6 (*MATLAB/OCTAVE: Periodische Splinefunktion*)

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
function [m,c,d] = periodicspline(x,y)
% computes the momentum representation of the periodic cubic spline
% through the data points (x(i),y(i)) i=1,..,n=length(x)
% m stores the moments and c and d the coefficients of the linear part
```

die die Daten $(x(i), y(i))$, $i = 1, .., n$ mit $y(1) = y(n)$ durch eine periodische kubische Splinefunktion interpoliert in der Darstellung mit den Momenten $M_i^* = M_i/6$ wie im Skript beschrieben. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems genügt es, die Matrix als vollbesetzte Matrix aufzubauen und den backslash-Operator zu benutzen. (Sie können natürlich auch den effektiveren Weg einer speziellen Eliminationsroutine für diese quasi-tridiagonale Matrix benutzen, der mit 3 Vektoren auskommt). Erstellen Sie ferner eine Funktion

```
function s=splineeval(xx,x,m,c,d)
%computes the cubic spline in its moment form at xx
```

zur Berechnung des Wertes der Splinefunktion an der Stelle xx. Berechnen Sie dabei das für xx relevante Intervall durch logarithmische Suche im Intervall $[1, n]$.

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktionen periodische Splineapproximationen für $f(x) = \sin(x)$ auf $[0, 2\pi]$ mit 11, 21, 41 und 81 äquidistanten Gitterpunkten und plotten Sie die Fehlerkurve, wobei eine Abtastgenauigkeit mit 401 Punkten genügt. Berechnen Sie den von n abhängigen maximalen Fehler auf diesem Gitter und die Quotienten aufeinanderfolgender maximaler Fehler. Welche $h-$Ordung der Konvergenz kann man aus den Resultaten ablesen?

Hinweis: Im Skript ist das Gitter mit $0, \ldots, n+1$ numeriert. Dies müssen Sie hier in $1, \ldots, n+2$ umsetzen, da MATLAB den Index 0 nicht kennt.

Abgabetermin: Dienstag, 7. November 2006
Programmieraufgabe: bis zum 14. November 2006.