



15. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Hinweis: Die Aufgaben der heutigen Übung sind Beispiele für Aufgaben, die Teil einer Klausur zur Veranstaltung sein könnten. Es wird empfohlen, einige der Aufgaben zur Klausurvorbereitung unter Klausurbedingungen zu lösen. (Der Umfang der Klausur wird geringer sein, als der Gesamtumfang aller Aufgaben auf diesem Blatt.)

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie die folgende Ungleichung mittels vollständiger Induktion:

$$a_n < \sqrt{n} + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $a_1 = 1$, $a_{n+1} := \sqrt{(n+1) + a_n}$.

Aufgabe G2 (Stetige Fortsetzbarkeit)

Gegeben sei $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ und die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}.$$

Ist f stetig? Untersuchen Sie, ob die Funktion f sich zu einer stetigen Funktion \tilde{f} auf ganz \mathbb{R} fortsetzen lässt. Geben Sie gegebenenfalls die Funktion \tilde{f} an.

Aufgabe G3 (Extrema)

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln(x)$.

Aufgabe G4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

- Was besagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?
- Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ gilt:

$$e^b - e^a < e^b(b - a).$$

Aufgabe G5 (Integration)

- Berechnen Sie das folgende Integral durch Substitution:

$$\int_{12}^{24} \frac{1}{\sqrt{2x+1}-3} dx$$

Hinweis: Substituieren Sie $u := \sqrt{2x+1} - 3$

(b) Berechnen Sie das folgende Integral mittels partieller Integration:

$$\int_1^e \sin(\ln(x)) dx$$

Aufgabe G6 (Konvergenz von Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz sowie absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}.$$

Aufgabe G7 (Funktionsfolgen)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n, & \text{falls } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 1, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und berechnen Sie die Grenzfunktion f .
- (b) Berechnen Sie

$$\int_0^1 f(x) dx \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- (c) Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gleichmäßig gegen f ?