Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Wintersemester 2009/2010
02./03. Februar 2010

14. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Potenzreihen und Konvergenzradius)

(a) Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen für $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x)^n$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(x-1)^{5k}$.

Hinweis: Verwenden Sie bei (ii) eine geeignete Substitution.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihe in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe G2 (Taylorpolynom)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sin^2(x) \cdot e^x\ .$$

(a) Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom $T_4 f$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, indem Sie die ersten 4 Ableitungen bilden.

(b) Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom $T_4 f$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, indem Sie bekannte Potenzreihen von $\sin x$ und e^x verwenden.

Bemerkung: Zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir das n-te Taylorpolynom von f im Entwicklungpunkt $x_0 = 0$ als $T_n f$.

Aufgabe G3 (Potenzreihen und Integration sowie Differentiation)

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}}\, x^n\,.$$

(a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius ρ und geben Sie für $x \in (-\rho, \rho)$ den Wert $f(x)$ der Potenzreihe an.

(b) Bestimmen Sie eine Potenzreihe für das Integral

$$\int_0^x \frac{16}{16+t}\, dt\,,$$

wobei $|x| < \rho$.

(c) Bestimmen Sie eine Potenzreihe und deren Wert für die Ableitung $f'(x)$, wobei $|x| < \rho$.

Aufgabe G4 (Satz von Taylor)

Beweisen Sie mithilfe des Satzes von Taylor folgende Aussage:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$-mal stetig differenzierbare Funktion mit $f^{(n+1)}(x) = 0$. Dann ist f ein Polynom mit Grad kleiner gleich n.