Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
26./27. Januar 2010

13. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Reihen)

Überprüfen Sie anhand geeigneter Kriterien, ob die folgenden Reihen konvergieren bzw. absolut konvergieren. Bestimmen Sie für (a) und (d) den Grenzwert der Reihe.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-3)^k}{4^k}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$,

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$,

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Aufgabe G2 (Funktionenfolgen)

Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx, & \text{falls } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie einige der Funktionen f_n für verschiedene Werte von n.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe G3 (Wurzelkriterium)

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe für $|x| < 2$ konvergiert und für $|x| > 4$ divergiert.
Hinweis: Benutzen Sie das Wurzelkriterium für eine Majorante und eine Minorante der Reihe.

Aufgabe G4 (Funktionenfolgen und -reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \sqrt[n]{n^2 x^3}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \qquad$ mit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) := e^{-n\cdot(2+\cos x)}$.

Hinweis: In (a) können Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ verwenden.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Majoranten und Minoranten) (1+1+1 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Reihen eine Majorante bzw. eine Minorante, von der bekannt ist, dass sie konvergiert bzw. divergiert.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{k^3+2k^2+5k-1}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+\sqrt{k}}{k^3+2k^2+5k-1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$.

Aufgabe H2 (Konvergenz) (3 Punkte)

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \frac{1}{k})^k$$

Aufgabe H3 (Funktionenfolgen) (2+2 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1]$,

(b) $g_n = \sin(\frac{x}{n}), \quad x \in \mathbb{R}$.