Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
19./20. Januar 2010

12. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Logarithmus-Funktion)
Sei $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert als

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Zeigen Sie mithilfe der Integraleigenschaften und ohne die Eigenschaften des Logarithmus zu benutzen, dass

$$L(uv) = L(u) + L(v)$$

für $u, v \in (0, \infty)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Substitutionen $t = vx$ bzw. $x = t/v$.

Aufgabe G2 (Konvergenz und absolute Konvergenz)
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz sowie absolute Konvergenz.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$,

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 2^n}$,

(vi) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{2k-1}$.

Aufgabe G3 (Cauchy-Produkt)
Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot q^n, \qquad |q| < 1.$$

(i) Ist die Reihe konvergent bzw. absolut konvergent?

(ii) Zeigen Sie unter Verwendung des Cauchy-Produktes, dass der Wert der Reihe $(\frac{1}{1-q})^2$ ist.

Aufgabe G4 (Leibniz-Kriterium)

Ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium für Reihen ist das **Leibniz-Kriterium**:
Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge nicht-negativer reeller Zahlen.
Dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

konvergent.

Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2})$

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Gemischtes zur Konvergenz und absoluten Konvergenz) (3+2+1 Punkte)

(a) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz sowie absolute Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{n^2}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1/\sqrt{n})$,

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{\sqrt{k!}}$.

(b) Untersuchen Sie folgenden Reihen in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha^n}$, $(\alpha \geq 0)$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta+\frac{1}{n}\right)^n$, $(\beta \in \mathbb{R})$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert folgender Reihe.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}.$$

Aufgabe H2 (Majorantenkriterium) (2 Punkte)

Beweisen Sie das Majorantenkriterium (Satz V.2.5).

Aufgabe H3 (Integralkriterium) (2 Punkte)

Finden Sie eine stetige Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, so dass $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \infty$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$.
Widerspricht dies dem Integralkriterium (Satz V.2.15)?