Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
12./13. Januar 2010

11. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Integration)

(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx$

(b) $\int_1^2 (3-2x)^9 dx$.

(ii) Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ an.

$$f(x) = 6x^2 + 3x - 5\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,.$$

Aufgabe G2 (Integration)

(i) Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_0^\infty e^{-2x}\cos(x)\,dx\,.$$

(ii) Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\,.$$

Bestimmen Sie Koeffizienten A, B, $C \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$f(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}. \qquad (*)$$

Benutzen Sie nun die Darstellung aus $(*)$, um das Integral

$$\int_{-1}^0 f(x)dx$$

zu berechnen.

Anmerkung: Die Methode, welche zur Darstellung $(*)$ führt, heißt *Partialbruchzerlegung*.

Aufgabe G3 (Uneigentliche Integrale)

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

existiert.

Aufgabe G4 (Integration)

Überprüfen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Integrale und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$ (ii) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx$

(iii) $\int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx,\ \alpha > 0$

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Riemann-Summen) (3 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \exp(x)$ sei gegeben. Berechnen Sie für die Zerlegung

$$Z = \{j/n,\ j \in \{0, ..., n\}\}$$

des Intervalls $[0, 1]$ die Untersumme $\underline{S}(Z)$ und die Obersumme $\overline{S}(Z)$. Welche Grenzwerte haben die Summen für $n \to \infty$? Was folgt für das Integral $\int_0^1 \exp(x)\,dx$?

Hinweise: $\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$. Siehe außerdem Übung 7, G2 (endl. geometrische Reihe).

Aufgabe H2 (Integrale) (1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1}\,dx,\ \text{(ii)} \int_0^\pi e^{\sin x}\cos x\,dx,\ \text{(iii)} \int_{-1}^1 \cos^2(x)dx,\ \text{(iv)} \int_2^{e^2} \frac{dx}{x\log x}.$$

Hinweis: Das Integral (iv) lässt sich am einfachsten durch raten bestimmen.

Aufgabe H3 (Partialbruchzerlegung) ($1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx,$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}\,dx.$