Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
15./16. Dezember 2009

10. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Wir wünschen Ihnen schöne Weihnachstferien und einen guten Start ins Neue Jahr!!!

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Regel von de l'Hospital)

(a) Überprüfen Sie für folgende Funktionen die Voraussetzungen der Regel von de l'Hospital. Berechnen Sie den Grenzwert, soweit er existiert.

i) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$

ii) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \sin x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$.
Wenn man den Grenzwert $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ berechnen will, darf man dann die Regel von de l'Hospital anwenden und folgern, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{1} = \text{divergent?}$$

Falls Nein: Warum darf man die Regel nicht anwenden? Ist die Divergenz trotzdem richtig?

Aufgabe G2 (Arcusfunktionen)

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes III.3.1 (Ableitung der Umkehrfunktion) aus der Vorlesung die folgenden Aussagen für $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

Aufgabe G3 (Exponentialfunktion und Logarithmus)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

a) $e^{3x}\,(e^x)^2 = \sqrt{\frac{e^{-8}}{e^{2x}}}$,

b) $\ln(\sqrt{7^{12-x}}) + 11\ln(2) = 11\ln(16)$.

Aufgabe G4 (Riemannsumme)

Sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ gegeben. Berechnen Sie für eine geeignete Folge von Partitionen die Riemannsummen für f.

Konvergiert die Folge der Riemannsummen für $n \to \infty$? Ist f Riemann-integrierbar auf $[0,1]$? Was ist gegebenenfalls der Wert des Integrals?

Hinweis: Benutzen Sie Satz I.3.2.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Riemann-Integral) (3 Punkte)

Berechnen Sie für $a < b$ das Integral

$$\int_a^b x^2 dx,$$

indem Sie den Grenzwert von Riemann-Summen bestimmen.

Hinweise: Vergl. Beispiel IV.1.4 und benutzen Sie Satz I.3.2.

Aufgabe H2 (Rechenregeln für Potenzen) (3 Punkte)

Benutzen Sie bekannte Sätze aus der Vorlesung, um Satz III.4.9 zu beweisen:

Seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

ii) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

iii) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Für $a, b \neq 1$, und $x, y > 0$ folgt:

iv) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + log_a(y)$

v) $\log_b(x) = \log_b(a) \cdot \log_a(x)$

vi) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

Hinweis: $a^{\log_a(x)} = x$ und $\log_a(a^x) = x$.

Aufgabe H3 (Leibnizsche Formel) (3+1 Punkte)

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, ferner seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Leibnizsche Formel:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Hinweis: Gehen Sie ähnlich vor wie im Beweis zum Bionomialsatz (Übung 3, G4).

(b) Berechnen Sie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 e^x$ die tausendste Ableitung $f^{(1000)}$.

Folgende Multiple-Choice-Aufgaben sind als freiwillige Wiederholung während der Weihnachtsferien gedacht. Die Aufgabe werden nicht von den Tutoren korrigiert und es werden keine Hausübungspunkte darauf vergeben. Die Lösung wird in der ersten Woche nach den Ferien online gestellt.

Aufgabe H4 (injektiv & surjektiv)

- ☐ Jede injektive Funktion ist surjektiv.
- ☐ Jede bijektive Funktion ist injektiv.
- ☐ Jede nicht-surjektive Funktion ist injektiv.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist

- ☐ injektiv.
- ☐ injektiv, wenn der Wertebereich auf $\mathbb{R}^+$ eingeschränkt wird.
- ☐ injektiv, wenn der Definitionsbereich auf $\mathbb{R}^+$ eingeschränkt wird.
- ☐ surjektiv.
- ☐ surjektiv, wenn der Wertebereich auf $\mathbb{R}^+$ eingeschränkt wird.
- ☐ surjektiv, wenn der Definitionsbereich auf $\mathbb{R}^+$ eingeschränkt wird.

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion:

- ☐ f ist surjektiv, wenn $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)\, f(x) = y$.
- ☐ f ist surjektiv, wenn $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, f(x) = y$.
- ☐ f ist surjektiv, wenn $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, f(x) = y$.
- ☐ f ist injektiv, genau dann wenn $(\forall x, x' \in X)\, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
- ☐ f ist injektiv, genau dann wenn $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)\, f(x) = y$.
- ☐ f ist injektiv, genau dann wenn $(\forall x, x' \in X)\, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Aufgabe H5 (Suprema und Maxima)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

- ☐ Ist M beschränkt, $M \neq \emptyset$, dann hat M ein Supremum.
- ☐ Ist M beschränkt, $M \neq \emptyset$, dann besitzt M ein Maximum.
- ☐ Ist a Maximum von M, dann ist a auch das Supremum von M.
- ☐ Ist a das Supremum von M, dann ist a das Maximum von M.

Aufgabe H6 (Folgen)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen.

- ☐ Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
- ☐ Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$.
- ☐ Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$.
- ☐ Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ☐ Wenn jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- ☐ Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, und sei $c_n = a_n \cdot b_n$, dann ist $\lim_{n\to\infty} c_n = ab$.
- ☐ Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, und sei $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, dann ist $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a}{b}$.

Aufgabe H7 (Rationale Funktionen)

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion mit Funktionen p und q

- ☐ Jede Nullstelle von $q(x)$ ist Polstelle von $f(x)$.
- ☐ Die Nullstellen von $f(x)$ werden durch die Nullstellen von $p(x)$ bestimmt.
- ☐ Die Nullstellen von $f(x)$ werden durch die Nullstellen von $q(x)$ bestimmt.

Aufgabe H8 (Grenzwerte)

- ☐ Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muss $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nicht eindeutig sein.
- ☐ Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert müssen in jedem Punkt einer Funktion übereinstimmen.
- ☐ Ist $|f(x)| \leq |g(x)|$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, dann folgt daraus, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
- ☐ Seien f und g stetige Funktionen, deren Grenzwerte für $x \to x_0$ existieren, so gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Aufgabe H9 (Stetigkeit)

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.
Aus welchen der folgenden Aussagen folgt die Stetigkeit von f in x_0?

- ☐ $(\exists\, \varepsilon > 0)\ (\forall\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☐ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x, y \in D : |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- ☐ Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, so dasss $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ ist.

Aufgabe H10 (Differenzierbarkeit I)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine in jedem Punkt $x \in [a, b]$ differenzierbare Funktion. Dann ist

☐ f stetig ☐ f stetig differenzierbar ☐ f beschränkt ☐ f gleichmäßig stetig.

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine in jedem Punkt $x \in (a, b)$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) \leq 0$. Dann ist

☐ f monoton wachsend ☐ f streng monoton wachsend
☐ f monoton fallend ☐ f streng monoton fallend.

Aufgabe H11 (Differenzierbarkeit II)

- ☐ Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- ☐ Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
- ☐ Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig.
- ☐ Jede lipschitzstetige Funktion ist differenzierbar.
- ☐ Jede lipschitzstetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
- ☐ Jede differenzierbare Funktion ist lipschitzstetig.
- ☐ Jede stetige und differenzierbare Funktion ist stetig differenzierbar.

Aufgabe H12 (Extremwerte)

- ☐ Stetige Funktionen nehmen auf offenen Intervallen stets ein Minimum und ein Maximum an.
- ☐ Stetige Funktionen nehmen auf abgeschlossenen Intervallen stets ein Minimum und ein Maximum an.
- ☐ Stetige Funktionen nehmen auf halboffenen Intervallen stets ein Minimum oder ein Maximum an.
- ☐ Es gibt stetige Funktionen, die auf einem offenen Intervall ein Minimum und ein Maximum annehmen.