Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
8./9. Dezember 2009

9. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit[1])

(a) Sei $D = [b, d] \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$ mit

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Zeigen Sie, dass f in a differenzierbar ist.

(b) Sei $D = [b, d] \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a und differenzierbar in $D \setminus \{a\}$ mit

$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x).$$

Zeigen Sie, dass f in a differenzierbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz und das Ergebnis aus (a).

(c) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \leq 0, \\ x^2 + 4, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

im Punkt $a = 0$. Geben Sie an, welche Voraussetzungen für (a) beziehungsweise (b) f nicht erfüllt, und wo diese jeweils im Beweis von (a) beziehungsweise (b) benutzt werden.

Aufgabe G2 (Differenzieren)

Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion f, prüfen Sie auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f(x) = |x^3|$,

(b) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{\tan |x|}$.

Aufgabe G3 (Ermittlung von Extremstellen)

Wir betrachten die Funktion $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

[1]Motivert durch eine Diskussion im Forum: `http://www.d120.de/forum/viewtopic.php?f=154&t=17593`.

(a) Wie lautet die Gleichung der Tangenten an der Stelle $x_0 = 1$?

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen.

(c) Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum.

Aufgabe G4 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)
Gegeben sei die Funktion $f : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \sin x$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend und stetig ist.

(c) Berechnen Sie $\left(f^{-1}\right)'(\pi\sqrt{2}/8)$.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Extremwerte) ($\frac{1}{2} + 1 + 2$ Punkte)
Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1,$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos^2(x)$$

und

$$h : (-10, 10) \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}, & \text{falls } x \in (-10, 1) \\ x^2 - 2x + 1, & \text{falls } x \in [1, 10) \end{cases} .$$

Aufgabe H2 (Erweiterter Mittelwertsatz) (4 Punkte)
Sei $D = [a, b]$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar, und sei $g(a) \neq g(b)$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass ein $c \in]a, b[$ existiert, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$

und gehen Sie ähnlich vor wie im Beweis des Mittelwertsatzes.

Aufgabe H3 (Umkehrfunktion) ($2\frac{1}{2}$ Punkte)
Sei $D = [0, \frac{\pi}{3}]$. Wir betrachten die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{3}x^2 \sin(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt.

(b) Überlegen Sie, warum f^{-1} stetig und streng monoton wachsend ist.

(c) Welchen Funktionswert hat f an der Stelle $\frac{\pi}{3}$? Geben Sie den Definitionsbereich $D(f^{-1})$ der Umkehrfunktion f^{-1} an!

(d) Welchen Wert hat die Ableitung von f^{-1} an der Stelle $\frac{\pi^2}{6}$?