Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
01./02. Dezember 2009

8. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wiederholung zur Stetigkeit)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Jede stetig differenzierbare Funktion ist differenzierbar.
- ☐ Jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
- ☐ Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig.
- ☐ Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- ☐ Ist eine Funktion nicht stetig, so ist sie auch nicht differenzierbar.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Funktionen stetig sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

$$\text{(i)}\quad f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{2}x^4 - 25.37 + \frac{3x+2-x^2}{2x^3} \cdot \sqrt{x}$$

$$\text{(ii)}\quad h : (-13,11) \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} x-1 & x < 1 \\ \frac{3}{2}(x-1) & 1 \le x \le 3 \\ (\tan\left(\frac{\pi}{3}\right))^2 & x > 3. \end{cases}$$

Aufgabe G2 (Differenzieren üben)

Geben Sie für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D(f_i) \subset \mathbb{R}$, auf dem sie definiert werden können, sowie die erste Ableitung an.

(a) $f_1(x) = 3x(2x+7)^8$,

(b) $f_2(x) = \cos(x^3)$,

(c) $f_3(x) = \frac{x^2}{\cos x}$,

(d) $f_4(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k x - c_k)^k$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_k, c_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

(e) $f_5(x) = \sqrt{x}\big(3x - 6x^3\big)$,

(f) $f_6(x) = \tan^3(5x)$,

(g) $f_7(x) = \frac{\cos(\sin(x))}{\sin(\sin(x))}$,

Aufgabe G3 (Differenzierbarkeit)

Wie oft ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

Tipp: Berechnen Sie die erste Ableitung und überprüfen Sie diese auf Stetigkeit.

Aufgabe G4 (Additionstheoreme)
Zeigen Sie durch Differentiation nach x, dass aus dem Additionstheorem

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

das Additionstheorem für $\sin(x+y)$ folgt.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Differenzierbarkeit) ($1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Punkte)
Untersuchen Sie die Funktionen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x|$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x|$

auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Ableitung.

Aufgabe H2 (Noch mehr zur Differenzierbarkeit) (4 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-a)|x-b|.$$

Beweisen Sie, dass f genau dann differenzierbar ist, wenn $a = b$.

Aufgabe H3 (Mittelwertsatz der Differentialgleichung) ($1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Punkte)

(a) Sei $a < c$ und $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto t^2$. Geben Sie ein $b \in (a,c)$ an mit

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(b)\,.$$

(b) Machen Sie das gleiche für $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{t}$ mit $0 < a < c$.