Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
10./11. November 2009

5. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Folgen)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

(c) Es gibt Folgen, die gleichzeitig konvergieren und divergieren.

(d) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.

(e) Jede konvergente Folge hat ein größtes Element.

(f) Jede von oben beschränkte Folge hat ein größtes Element.

(g) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind, dann ist auch $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(h) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe G2 (Doppelfolgen)

Zu $n, m \in \mathbb{N}$ sei $a_{n,m} := (1 - \frac{1}{m+1})^{n+1}$. Bestimmen Sie

$$a = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{a} = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{n,m})$$

Hinweis: Um a zu berechnen, berechnen Sie den Grenzwert $a_n := \lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ und dann den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$)

Aufgabe G3 (Cauchyfolgen)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist. (Vergleiche Beweis von Satz II.1.18 im Skript.)

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Cauchyfolge und s_n definiert als das Supremum der Menge $A_n := \{a_m \,|\, m \geq n\}$. Zeigen Sie,

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, |a_n - s_n| \leq \epsilon\,.$$

(Vergleiche Beweis von Satz II.1.18 im Skript.)

(c) Sei $b_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1}{k}$ und $m \geq n$ mit $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $|b_m - b_n| \leq \frac{1}{n-1}$ falls $n - m$ gerade ist. (Vergleiche Beispiel II.1.19 im Skript).

Aufgabe G4 (Konvergenz von Folgen)

Sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^k}{2^n}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ streng monoton fallend ist.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Fibonacci-Folge) (2 Punkte)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci Folge. Entscheiden Sie, ob die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{n}{f_n}$$

konvergiert. (Zu so einer Entscheidung gehört immer ein Beweis!)

Aufgabe H2 (Wahr oder falsch?) (2+2+1 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen für reelle Folgen:

(a) Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier divergenter Folgen ist ebenfalls divergent (getrennt für die vier Operationen).

(b) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann, wenn $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

(c) Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N_\varepsilon$ gilt: $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.
Hinweis: Betrachten Sie $a_n = \sqrt{n}$.

Aufgabe H3 (Konvergenz) (1+2 Punkte)

Untersuchen Sie die beiden nachstehenden Folgen auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\sqrt{\frac{n^2+1}{(10n-5)^2}}\right)^3 .$$

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{\left(1+\frac{1}{\frac{2}{5}n}\right)^n n^7 + 2n^5 + 3n^2}{3n^7 + 5n^2 + 2n^3} .$$