Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
27./28. Oktober 2009

3. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Binominialkoeffizienten)
Für natürliche Zahlen $n \geq k \geq 0$ ist der *Binominialkoeffizient* „n über k" definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}\,;$$

per Konvention ist außerdem $\binom{n}{k} := 0$ für $k > n$. Zeigen Sie, dass es genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge M gibt.

Aufgabe G2 (Pascalsches Dreieck)
Zeigen Sie die Aussage

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(a) mit der Definition des Binominialkoeffizienten,

(b) mit der kombinatorischen Interpretation aus Aufgabe G1.

Aufgabe G3 (Funktionen)
Bezeichne S die Menge aller Studenten an der TU Darmstadt und D die Menge aller Daten eines Jahres.

(a) Sei $f : S \to D$ die Abbildung, die jedem Studenten aus der Menge S das Datum seines Geburtstages zuordnet.
Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn die Menge S durch die Menge aller an deinem Tisch sitzenden Studenten ersetzt wird?

(b) Sei M die Menge aller an der TU Darmstadt vergebenen Matrikelnummern und $g : S \to M$ die Abbildung, die jedem Studenten seine Matrikelnummer zuordnet.
Ist g injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn die Menge M durch die Menge der natürlichen Zahlen ersetzt wird?

Aufgabe G4 (Binomialsatz)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,.$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$. Dies nennt man *Indexverschiebung*.

(b) Welche Eigenschaften der reellen Zahlen haben Sie beim Beweis in (a) benutzt? Was folgt daraus für die Gültigkeit der Aussage? Gilt die Aussage auch für $x, y \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in \mathbb{C}$?

Aufgabe G5 („Deppenformel“)

(a) Leiten Sie aus den De Morganschen Gesetzen die Aussage $\forall x A(x) \vee \exists x \neg A(x)$ her.

(b) Zeigen Sie daraus die „Deppenformel“ $\exists x (A(x) \Rightarrow \forall y A(y))$.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Summendarstellung der Fibonacci-Zahlen) (3 Punkte)

Zeigen Sie die folgende Summendarstellung für die aus der letzten Übung bekannten Fibonacci Zahlen:

$$F_{n+1} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-l}{l},$$

wobei $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich a bezeichnet (abrunden).

Aufgabe H2 (Funktionen) (2 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 29, \\ f_2 &: [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 29, \\ g_1 &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x^2 \quad \text{und} \\ g_2 &: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 : x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität und geben Sie jeweils das Bild der Funktion an. Geben Sie auch die Umkehrfunktion an, falls diese existiert.

Aufgabe H3 (Abbildungen, kartesisches Produkt, Graph) (2+2 Punkte)

(a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, wobei $D := \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$ und

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad -1 \leq x < 0, \\ x+1 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} & \text{für} \quad 1 \leq x\,. \end{cases}$$

(i) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(ii) Bestimmen Sie die Bildmenge von f.

(iii) Geben Sie das Urbild von $[\frac{3}{2}, 4[$ bzgl. f an. (Für eine Funktion $f : A \to B$ ist das Urbild $f^{-1}[C]$ von $C \subset B$ definiert als $f^{-1}[C] := \{x \in A \,|\, f(x) \in C\}$.)

(b) Seien $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$.

1. Welche der folgenden Teilmengen von $X \times Y$ ist der Graph einer Abbildung $f : X \to Y$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i)	$\{(1,b), (2,d), (3,a), (4,f)\}$	(iv)	$\{(2,a), (3,b), (1,c), (2,d), (4,e), (1,f)\}$
(ii)	$\{(1,a), (2,b), (3,c)\}$	(v)	$\{(4,c), (1,f), (3,e), (2,c)\}$
(iii)	$\{(3,e), (2,a), (1,b), (3,f)\}$	(vi)	$\{(2,d), (1,f), (3,a), (1,b), (4,c)\}$

2. Seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ gegeben durch $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$. Berechnen Sie die Bildmengen $f[A] := \{y \in Y : \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$ und die Urbilder von B bzgl. f für alle Funktionen f, die Sie oben gefunden haben.

Aufgabe H4 (Noch mehr Induktion) (1 Punkt)

Die Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$K_0 = 1 \quad \text{und} \quad K_{n+1} = 1 + \min(2K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 3K_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}).$$

Zeigen Sie, dass $K_n \geq n$.