Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
20./21. Oktober 2009

2. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wiederholung: Mengen)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\},$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\},$$
$$M_3 = \{n \in \mathbb{N} : 2 \text{ ist Teiler von } n\}.$$

(b) Bestimmen Sie $M_1 \setminus M_2$, $M_3 \cup M_2$, und $M_1 \cap M_3$ und skizzieren Sie diese Mengen.

(c) Bestimmen Sie für die Mengen M_1, M_2 und M_3 jeweils Supremum und Infimum (falls diese existieren) und geben Sie an, ob diese in der jeweiligen Menge liegen (in diesem Fall spricht man von einem Maximum bzw. Minimum).

(d) Beweisen Sie, dass $M_2 \subseteq M_1$.

Aufgabe G2 (Rechnen mit Summen und Produkten)

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Summen und Produkte:

$$(i) \quad \sum_{i=0}^{5}(i+1) \qquad (ii) \sum_{m=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(km-2k)$$

$$(iii) \sum_{m=1}^{2}\prod_{k=m}^{3}(k^2-1).$$

Aufgabe G3 (Vollständige Induktion)

(a) Beweisen Sie die folgende Formel mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1.$$

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: n Personen können sich auf $n!$ verschieden Weisen in einer Reihe aufstellen.

Aufgabe G4 (reelle Zahlen und Körperaxiome)

(a) Gegeben seien die folgenden Aussagen:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}_0 : n > x, \tag{1}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n > x, \tag{2}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}_0 : x \geq n, \tag{3}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xy \leq 0 \tag{4}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : xy \leq 0 \tag{5}$$

Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründe Sie Ihre Entscheidung.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie die Körperaxiome, um zu zeigen, dass die Gleichung $a + x = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich $x = b - a$ hat.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $x = b - a$ die Gleichung löst. Zeigen Sie anschließend die Eindeutigkeit der Lösung.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Vollständige Induktion) (3+1 Punkte)

(a) Die Fibonacci-Folge $(F_1, F_2, \ldots)$ ist eine Folge natürlicher Zahlen. Dabei ist jedes Folgeglied die Summe seiner beiden Vorgänger. Formal bedeutet dies:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{mit } F_1 = 1, \quad F_2 = 1.$$

(i) Bestimmen Sie die ersten acht Folgeglieder.

(ii) Beweisen Sie folgende explizite Formel für $n \geq 1$:

$$F_n = \frac{r^n - s^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{mit } r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

(b) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis für die Aussage $15 = 16$:

Behauptung: Für jedes $n \geq 1$ gilt $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Nachrechnen zeigt, dass die Behauptung für $n = 1$ offensichtlich gilt.

Induktionsannahme: Es sei $k \in \mathbb{N}$. Nehmen Sie an, dass die Aussage für k gilt, das heißt $1 + 2 + \ldots k = \frac{1}{2}k(k+1) + 1$.

Induktionsschritt von k auf $k+1$: Es gilt

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) \overset{IA}{=} \frac{1}{2}k(k+1) + 1 + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + 1,$$

was zu zeigen war.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Für $n = 5$ folgt daraus $15 = 16$.

Aufgabe H2 (Anordnungsaxiome) (1+2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Beweisen Sie die Aussage mithilfe der Anordnungsaxiome oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

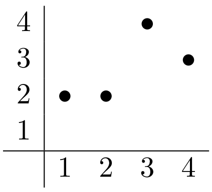
(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ab > 1$ und $a < 1$. Dann folgt, dass $b > 1$.

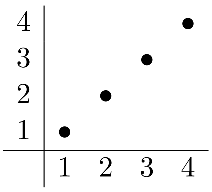
(b) Seien $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$. Dann folgt, dass $a \cdot x < b \cdot y$.

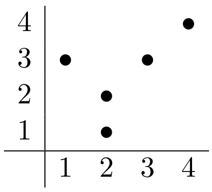
Aufgabe H3 (Funktionen) (3 Punkte)

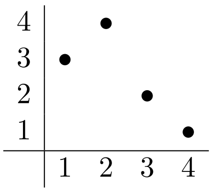
Sei $M := \{1, 2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Teilmengen von $M \times M$ kann Graph einer Funktion von M nach M sein?

Falls es eine solche Funktion gibt, untersuchen sie diese auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


(v)