Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Andreas Gärtner
Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
12.1.2010

8. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 29 (3 Punkte)

Pädagoge P. liest eine Studie über den Suchtmittelkonsum in den Klassen neun und zehn von Gesamtschulen. Gegeben seien die folgenden Ereignisse:

- $A =$ "Schüler ist Sportvereinsmitglied"
- $B =$ "Schüler ist Raucher"
- $C =$ "Schüler ist Linkshänder"

Laut dieser Studie weiss man zuverlässig, dass folgende Wahrscheinlichkeiten gelten:

- $P(B) = 0.432$
- $P(C) = 0.1$
- $P(A \cap B) = 0.172$
- $P(A \cap C) = 0.048$

Man weiss zudem, dass die Ereignisse A und C unabhängig sind. Finden Sie heraus, ob es einen Zusammenhang zwischen den Ereignissen A und B gibt!

Aufgabe 30 (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t \leq a \\ \frac{1}{b-a} & , \text{ falls } a < t \leq b \\ 0 & , \text{ falls } b < t \end{cases}$$

Der Funktionswert an der Stelle t der Verteilungsfunktion der Gleichverteilung ist dann die Fläche zwischen der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $(-\infty, x]$.

(a) Zeichnen Sie die Funktion f für $a = 2$ und $b = 4$.

(b) Bestimmen Sie die den Funktionswert der Verteilungsfunktion der Gleichverteilung an der Stelle b. Welchen Funktionswert hat diese Funktion an einer Stelle x_0 mit $x_0 > b$?

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a und b das Argument, für das die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung den Funktionswert $\frac{1}{2}$ hat.

Bemerkung: Durch die Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ wird das zufällige Auswählen einer reellen Zahl aus dem Intervall $[a, b]$ beschrieben.

Aufgabe 31 (3 Punkte)

Beim Roulettespiel wird zufällig eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ ausgewählt. Dabei sind die Zahlen zusätzliche mit Farben markiert: Die Null ist grün, die Zahlen

$$2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35$$

sind schwarz und die restlichen Rot. Wir betrachten die Spielstrategie: Setzen auf Rot. Gewinnen wir (d.h. eine rote Zahl wird ausgewählt) erhalten wir den doppelten Einsatz. Wird eine schwarze Zahl gewählt, verlieren wir das eingesetzte Geld. Im Falle der Null existieren verschiedene Spielarten. Wir gehen hier davon aus, dass man die Hälfte des Einsatzes verliert.

(a) Definieren Sie zur Modellierung dieses Zufallsexperiments einen Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{0, \ldots, 36\}$.

(b) Definieren Sie mit der Grundmenge aus Teil (a) eine Zufallsvariable X, die den Gewinn (bzw. Verlust) für den Einsatz von einer Geldeinheit auf Rot modelliert.

(c) Berechnen Sie für die Zufallsvariabel X aus Aufgabenteil (b) die Wahrscheinlichkeit

$$P(X < 0).$$

Aufgabe 32 (3 Punkte)

Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist folgendermaßen definiert:

$$\Phi : \mathbb{R} \to [0,1], \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Der Funktionswert von Φ an der Stelle x ist also die Fläche zwischen der Funktion $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ und der x-Achse über dem Intervall $(-\infty, x]$.

In der folgenden Tabelle sind einige Funktionswerte der Standardnormalverteilung abgebildet.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\Phi(x)$	0.5	0.54	0.579	0.618	0.655	0.692	0.726	0.758	0.788	0.816	0.841

(a) Skizzieren Sie qualitativ die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

für $t \in [-4, 4]$.

(b) Begründen Sie Anhand der Skizze aus Teil (a), dass gilt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

(c) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable, d.h. eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion Φ. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

i. $\mathbf{P}\{X \leq 0.4\}$

ii. $\mathbf{P}\{X > 0.7\}$

iii. $\mathbf{P}\{0.1 < X \leq 0.2\}$

Abgabe der Übung: Eine Woche nachdem das Übungsblatt zu Ihrem Übungstermin bearbeitet wurde, zu Beginn der nächsten Übung bei Ihrer Übungsgruppenleiterin oder bei Ihrem Übungsgruppenleiter.