Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Andreas Gärtner
Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
27./28.01.2010

10. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft"

Aufgabe 37 (3 Punkte)

(a) Für die Zufallsvariable X gelte:

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = 0.3, \mathbf{P}\{X = 4\} = 0.4, \mathbf{P}\{X = 5\} = 0.3.$$

Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariablen X.

(b) Sei Y eine $U(1, 2)$-verteilte und sei Z eine von Y unabhängige $U(0, 4)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Varianz von $Y + Z$.

Aufgabe 38 (3 Punkte)

Die Zufallsvariable X ist stetig verteilt mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 39 (3 Punkte)

In einer Urne befinden sich 5 Kugeln. Jede der Kugeln ist entweder weiß oder schwarz. Wir ziehen dreimal jeweils eine Kugel mit Zurücklegen und erhalten folgendes Ergebnis: weiß, schwarz, schwarz. Gesucht ist die Anzahl $\theta \in \{0, \ldots, 5\}$ der schwarzen Kugeln. Die Zufallsvariable X_i habe den Wert 1, falls bei der i-ten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wurde und Null sonst (für $i = 1, 2, 3$). Die Idee beim Maximum-Likelihood-Prinzip ist es, den Parameter θ so zu wählen, dass die Wahrscheinlichkeit für das oben angegebene Ziehungsergebnis maximal ist. Dabei kann man davon ausgehen, dass die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 unabhängig und identisch verteilt sind. Bei obiger Ziehung wurde für X_1 der Wert 0, für X_2 der Wert 1 und für X_3 der Wert 1 beobachtet.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_1 in Abhängigkeit von θ.

(b) Bestimmen Sie dasjenige θ für $\theta \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, für das die Funktion

$$L(\theta) = \mathbf{P}_\theta[X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1]$$

maximal wird.

Bemerkung: Mit L bezeichnen wir die *Maximum-Likelihood-Funktion*.

Aufgabe 40 (3 Punkte)

Drei perfekten Schützen stehen drei unschuldige Enten gegenüber. Jeder Schütze wählt zufällig und unbeeinflusst von den anderen Schützen eine Ente aus, auf die er schießt. Sei X die zufällige Zahl überlebender Enten. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X unter Verwendung der Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^{3} X_i, \text{ wobei } X_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls Ente } i \text{ überlebt} \\ 0 & \text{, falls Ente } i \text{ nicht überlebt} \end{cases}$$