Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Andreas Gärtner
Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
20./21.01.2010

9. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 33 (3 Punkte)

(a) Eine diskrete Zufallsgröße X heißt bernoulliverteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, wenn gilt:

$$\mathbf{P}[X=1] = p, \text{ und } \mathbf{P}[X=0] = 1-p.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert einer bernoulliverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $p \in (0,1)$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $X_1, \ldots, X_n$ bernoulliverteilte Zufallsvariablen mit Parameter p, so ist die Zufallsvariable $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ binomialverteilt mit Parametern n und p. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Resultats den Erwartungswert der Zufallsvariablen Y.

Lösung:

(a)

$$\mathbf{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Y &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{\text{(Eigenschaften von }\mathbf{E})}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) \\ &\overset{(X_i \text{ bernoulliverteilt})}{=} \sum_{i=1}^n p = n \cdot p\end{aligned}$$

Aufgabe 34 (3 Punkte)

Psychologe M. untersucht Mütter, die nach der Geburt ihres Kindes eine psychologische Behandlung beginnen, weil sie an einer psychologischen Störung leiden. Aus Erfahrung weiß er, dass eine solche Behandlung im Mittel 5 Monate nach der Geburt begonnen wird. Um die Zeit bis zum Beginn der Behandlung (in Monaten) stochastisch zu modellieren, beschließt er dazu eine Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

zu verwenden, wobei $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ (= die positiven reellen Zahlen ohne die Null) ein noch zu bestimmender Parameter der Dichte ist.

Wie muss er λ wählen, damit der Erwartungswert der Zufallsvariable X gerade 5 ist?

Hinweis Verwenden Sie, dass

$$F(x) = -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = xe^{-\lambda x}$ ist.

Lösung: Wir berechnen den Erwartungswert wie in der Vorlesung mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda \cdot \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda \cdot \left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty \\
&= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty \\
&= 0 - \frac{1}{\lambda} \cdot \left[e^{-\lambda x}\right]_0^\infty \\
&= 0 - \frac{1}{\lambda} \cdot [0 - 1] \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

womit wir, um obige Frage zu beantworten, $\lambda = \frac{1}{5}$ wählen.

Aufgabe 35 (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } x \in [a, b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Sei X eine auf dem Intervall $[1, 2]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert X.

(b) Sei Y eine auf dem Intervall $[2, 4]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y^2.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $2X + 3Y^2$, wobei X und Y wie in den Aufgabenteilen (a) bzw. (b) definiert sind.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0\ dx + \int_{1}^{2} x \cdot \frac{1}{2-1}\ dx + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot x\ dx \\
&= \int_{1}^{2} x\ dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{x=1}^{2} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(Y^2\right) &= \cdots = \int_2^4 x^2 \cdot \frac{1}{4-2}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 x^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\bigg|_{x=2}^4 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{1}{3}\cdot 2^3\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\right) = \frac{28}{3}\end{aligned}$$

(c)

$$\mathbf{E}\left(2X+3Y^2\right) = 2\cdot\mathbf{E}X + 3\cdot\mathbf{E}\left(Y^2\right) = 3+28 = 31$$

Aufgabe 36 (3 Punkte)

Immer wenn Psychologe P. seine Kollegin K. besuchen will muss er einmal umsteigen. Sein Bus kommt rein zufällig (gleichverteilt) zwischen 8:07 Uhr und 8:14 Uhr am Bahnhof an. Die Regionalbahn zu K. bekommt er aber nur, wenn er pünktlich bis 8:10 am Bahnhof ist. Kommt er jedoch zu spät, so muss er ein Taxi nehmen und somit anstatt 6 Euro für eine Zugfahrkarte 31 Euro für das Taxi zahlen. Sei Z die reelle Zufallsvariable, welche die zufälligen Fahrtkosten beschreibt.

Bestimmen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsvariable.

Lösung: Wir modellieren die Kosten beim zufälligen Eintreffen mit der Kostenfunktion

$$h(x) = \begin{cases} 6, & 7 \le x < 10, \\ 31, & 10 \le x \le 14, \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

womit wir den Erwartungswert berechnen können mit:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}h(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(X)f(x)dx \\ &= \int_7^{14} h(X)f(x)dx \\ &= \int_7^{10} 6\cdot\frac{1}{14-7}dx + \int_{10}^{14} 31\cdot\frac{1}{14-7}dx \\ &= \frac{6}{7}\,[x]_7^{10} + \frac{31}{7}\,[x]_{10}^{14} \\ &= \frac{6\cdot 3 + 31\cdot 4}{7} \\ &= \frac{142}{7} \\ &\approx 20,29\end{aligned}$$