Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Andreas Gärtner
Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
12.1.2010

8. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 29 (3 Punkte)

Pädagoge P. liest eine Studie über den Suchtmittelkonsum in den Klassen neun und zehn von Gesamtschulen. Gegeben seien die folgenden Ereignisse:

- $A =$ "Schüler ist Sportvereinsmitglied"
- $B =$ "Schüler ist Raucher"
- $C =$ "Schüler ist Linkshänder"

Laut dieser Studie weiss man zuverlässig, dass folgende Wahrscheinlichkeiten gelten:

- $P(B) = 0.432$
- $P(C) = 0.1$
- $P(A \cap B) = 0.172$
- $P(A \cap C) = 0.048$

Man weiss zudem, dass die Ereignisse A und C unabhängig sind. Finden Sie heraus, ob es einen Zusammenhang zwischen den Ereignissen A und B gibt!

Lösung: Es gilt:

- $P(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$
- $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$.

Damit gibt es einen Zusammenhang zwischen den Ereignissen.
Damit gilt keine Unabhängigkeit.

Aufgabe 30 (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t \leq a \\ \frac{1}{b-a} & , \text{ falls } a < t \leq b \\ 0 & , \text{ falls } b < t \end{cases}$$

Der Funktionswert an der Stelle t der Verteilungsfunktion der Gleichverteilung ist dann die Fläche zwischen der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $(-\infty, x]$.

(a) Zeichnen Sie die Funktion f für $a = 2$ und $b = 4$.

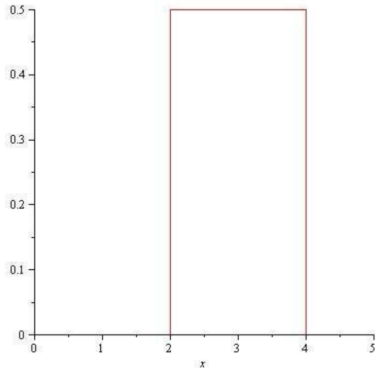
(b) Bestimmen Sie die den Funktionswert der Verteilungsfunktion der Gleichverteilung an der Stelle b. Welchen Funktionswert hat diese Funktion an einer Stelle x_0 mit $x_0 > b$?

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a und b das Argument, für das die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung den Funktionswert $\frac{1}{2}$ hat.

Bemerkung: Durch die Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ wird das zufällige Auswählen einer reellen Zahl aus dem Intervall $[a, b]$ beschrieben.

Lösung:

(a)



(b) Die zu berechnende Fläche ist ein Rechteck mit Seitenlänge $b - a$ und Höhe $\frac{1}{b-a}$. Demnach ist der Funktionswert der Gleichverteilung an der Stelle b gleich $(b - a) \cdot \frac{1}{b-a} = 1$. Für Werte, die größer als b sind, bleibt der Flächeninhalt 1, da ja f oberhalb von b immer gleich 0 ist.

(c) Es muss gelten:

$$\frac{1}{2} = x \cdot \frac{1}{b - a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{b - a}{2}$$

Da die Dichte der Gleichverteilung erst ab der Stelle a ungleich Null ist, folgt, dass die Verteilungsfunktion einer auf dem Intervall (a, b) gleichverteilten Zufallsvariable an der Stelle $x = a + \frac{b-a}{2}$ den Wert $\frac{1}{2}$ hat.

Aufgabe 31 (3 Punkte)

Beim Roulettespiel wird zufällig eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ ausgewählt. Dabei sind die Zahlen zusätzliche mit Farben markiert: Die Null ist grün, die Zahlen

$$2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35$$

sind schwarz und die restlichen Rot. Wir betrachten die Spielstrategie: Setzen auf Rot. Gewinnen wir (d.h. eine rote Zahl wird ausgewählt) erhalten wir den doppelten Einsatz. Wird eine schwarze Zahl gewählt, verlieren wir das eingesetzte Geld. Im Falle der Null existieren verschiedene Spielarten. Wir gehen hier davon aus, dass man die Hälfte des Einsatzes verliert.

(a) Definieren Sie zur Modellierung dieses Zufallsexperiments einen Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{0, \ldots, 36\}$.

(b) Definieren Sie mit der Grundmenge aus Teil (a) eine Zufallsvariable X, die den Gewinn (bzw. Verlust) für den Einsatz von einer Geldeinheit auf Rot modelliert.

(c) Berechnen Sie für die Zufallsvariabel X aus Aufgabenteil (b) die Wahrscheinlichkeit

$$P(X < 0).$$

Lösung:

(a) Da die Grundmenge vorgegeben ist, muss nur noch die Wahrscheinlichkeit für Teilmengen von Ω angegeben werden. Man kann davon ausgehen, dass alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Es handelt sich also um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum. Demnsch gilt für $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A}{37}.$$

(b) Die zu definierende Zufallsvariable X soll den Wert 1 haben, falls eine rote Zahl gewählt wird, -1 für eine schwarze Zahl und $-\frac{1}{2}$ für die Null. Formal heißt das:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \to \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in \{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36\} \\ -1, & \text{falls } \omega \in \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35\} \\ -\frac{1}{2}, & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

(c)

$$P(X < 0) = P(X = -1) + P(X = -\frac{1}{2}) = \frac{18}{37} + \frac{1}{37} = \frac{19}{37}$$

Aufgabe 32 (3 Punkte)

Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist folgendermaßen definiert:

$$\Phi : \mathbb{R} \to [0, 1], \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Der Funktionswert von Φ an der Stelle x ist also die Fläche zwischen der Funktion $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ und der x-Achse über dem Intervall $(-\infty, x]$.

In der folgenden Tabelle sind einige Funktionswerte der Standardnormalverteilung abgebildet.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\Phi(x)$	0.5	0.54	0.579	0.618	0.655	0.692	0.726	0.758	0.788	0.816	0.841

(a) Skizzieren Sie qualitativ die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

für $t \in [-4, 4]$.

(b) Begründen Sie Anhand der Skizze aus Teil (a), dass gilt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

(c) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable, d.h. eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion Φ. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

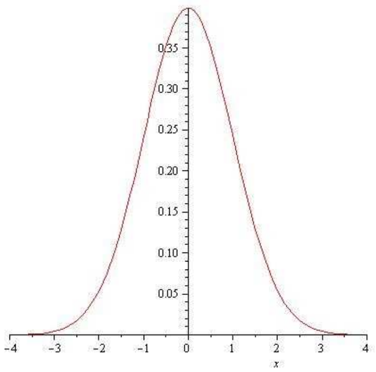
i. $\mathbf{P}\{X \leq 0.4\}$

ii. $\mathbf{P}\{X > 0.7\}$

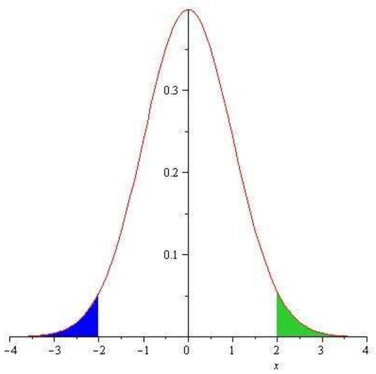
iii. $\mathbf{P}\{0.1 < X \leq 0.2\}$

Lösung:

(a) Die Funktion hat eine Extremstelle bei $x = 0$ und Wendestellen bei $x = 1$ und $x = -1$. Da die Exponentialfunktion nicht negativ ist, gilt dies auch für f. Außerdem ist die Funktion Achsensymmetrisch zur y-Achse.



(b) In der folgenden Abbildung sind Flächen grün bzw. blau markiert. Da der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse ist, sind die beiden Flächen gleich groß. Da die Standardnormalverteilung ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, muss die Fläche zwischen Graph und x-Achse insgesamt 1 sein. Die Fläche des nicht grün markierten Teils ist demnach so groß, wie $1-$ Fläche des grün markierten Teils.



(c) i. $\mathbf{P}\{X \leq 0.4\} = \Phi(0.4) = 0.655$

ii. $\mathbf{P}\{X > 0.7\} = 1 - \Phi(0.7) = 1 - 0.758 = 0.242$

iii. $\mathbf{P}\{0.1 \leq X < 0.2\} = \Phi(0.2) - \Phi(0.1) = 0.579 - 0.54 = 0.039$

Abgabe der Übung: Eine Woche nachdem das Übungsblatt zu Ihrem Übungstermin bearbeitet wurde, zu Beginn der nächsten Übung bei Ihrer Übungsgruppenleiterin oder bei Ihrem Übungsgruppenleiter.