



7. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 25

(3 Punkte)

Psychologe P. hat eine neuartige Vokabel-Lernmethode entwickelt. Er hat ermittelt, dass sich 55% der Probanden eines Tests noch nach vier Wochen an **eine** mit seiner Lernmethode gelernte Vokabel erinnern können. Innerhalb dieser vier Wochen wurde die Vokabel nicht wiederholt. P. würde nun gerne wissen, wie das Experiment mit 10 Vokabeln verlaufen wäre. Dabei ist er an den Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse interessiert:

- (a) A="Ein Proband behält genau 5 Vokabeln im Gedächtnis."
- (b) B="Ein Proband behält weniger als 10 Vokabeln im Gedächtnis."
- (c) C="Ein Proband behält 5 oder 10 Vokabeln im Gedächtnis."

Berechnen Sie die Ergebnisse auf drei Stellen genau! Gehen Sie dabei davon aus, dass die einzelnen Vokabeln unbeeinflusst voneinander im Gedächtnis behalten werden.

Lösung:

- $P[A] = \binom{10}{5} \cdot 0.55^5 \cdot 0.45^{10-5} \approx 0.234$
- Es gilt $P[B] = 1 - P[B^c] = 1 - \binom{10}{10} \cdot 0.55^{10} \cdot 0.45^{10-10} \approx 0.997$
- $P[C] = P[A] + P[B^c] = 0.237$

Aufgabe 26

(3 Punkte)

Eine Multiple-Choice-Klausur mit $n \in \{10, 20\}$ Aufgaben, bei denen jeweils die richtige von zwei vorgegebenen Antwortmöglichkeiten angekreuzt werden muss, gilt als bestanden, wenn mindestens 60 % der Antworten richtig sind. Student S. versucht diese Klausur zu bestehen, indem er bei jeder Aufgabe je eine der beiden möglichen Antworten zufällig (und unbeeinflusst von seiner Wahl bei den anderen Aufgaben) auswählt.

- (a) Was würden Sie vermuten: Ist es wahrscheinlicher, dass Student S. die Klausur besteht, wenn sie 10 oder wenn sie 20 Fragen enthält?
- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. die Klausur besteht, für $n = 10$ und $n = 20$.

Lösung: Es liegt eine Binomialverteilung vor mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0.5$ pro Aufgabe.

$$\Leftrightarrow p = 0.5 \Rightarrow q = 1 - p = 0.5 = p$$

- (a) Keine Ahnung!

(b) Um die Klausur zu bestehen, müssen mindestens 60 % der Antworten richtig sein, d.h. bei $n = 10$ bzw. $n = 20$ müssen 6 bzw. 12 der Antworten richtig sein.

Definiere:

$A :=$ Ereignis, dass Student S. die Klausur besteht

Für $n = 10$:

$$P(A) = \sum_{k=6}^n \binom{n}{k} p^k \cdot p^{n-k} = p^n \sum_{k=6}^n \binom{n}{k}$$

Beachte:

$$\begin{aligned} 1 &= p^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad (\text{nach Def. d. Zähldichte}) \\ &= p^n \sum_{k=0}^4 \binom{n}{k} + p^n \binom{n}{5} + p^n \sum_{k=6}^n \binom{n}{k} \\ &= 2 \cdot p^n \sum_{k=0}^4 \binom{n}{k} + p^n \binom{n}{5} \quad (\text{da } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P(A) = p^n \sum_{k=0}^4 \binom{n}{k} = \left(1 - p^n \binom{n}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = 0.377$$

Für $n = 20$:

$$P(A) = p^n \sum_{k=12}^n \binom{n}{k}$$

Beachte:

$$\begin{aligned} 1 &= p^n \sum_{k=0}^8 \binom{n}{k} + p^n \left(\binom{n}{9} + \binom{n}{10} + \binom{n}{11} \right) + p^n \sum_{k=12}^{20} \binom{n}{k} \\ &= 2 \cdot p^n \sum_{k=0}^8 \binom{n}{k} + p^n \left(2 \cdot \binom{n}{9} + \binom{n}{10} \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P(A) = p^n \sum_{k=0}^8 \binom{n}{k} = \left(1 - p^n \left(2 \cdot \binom{n}{9} + \binom{n}{10}\right)\right) \cdot \frac{1}{2} = 0.2517$$

Aufgabe 27

(3 Punkte)

(a) Student S. stellt jeden Morgen seine Zimmerpflanze auf eine Fensterbank. Der Stellvorgang ist gleichverteilt und die Pflanze wird immer in einem Bereich abgestellt, der zwischen 10 cm und 50 cm vom rechten Rand der Fensterbank entfernt ist. Student S. merkt nicht, dass die ersten 5 cm seiner Stellfläche stark nach unten geneigt sind, was unweigerlich zum Absturz seiner Pflanze führen würde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geschieht dies?

(b) Die Zeit (in Tagen) bis zum Ausfall einer No-Name-Energiesparlampe sei Exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{10}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit übersteht eine solche Lampe die ersten 11 Betriebstage?

Lösung: (a) $P[(10, 15)] = \int_{(10,15)} \frac{x}{40} dx = \frac{1}{8}$

(b) $P[(0, 11)] = \int_0^{11} \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{1}{10}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{10}x} \right]_0^{11} = 1 - e^{-\frac{11}{10}} = 0.667$

Aufgabe 28

(3 Punkte)

Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch ein W-Maß beschrieben wird, dass eine Dichte der Form

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{für } 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

besitzt. Hierbei sind $\alpha, \beta > 0$ Parameter der Dichte.

- (a) Welche Beziehung muss zwischen α und β bestehen, damit f wirklich Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist?
- (b) Bestimmen Sie für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$ die zu f gehörende Verteilungsfunktion, d.h. die durch

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

definierte Funktion F .

- (c) Skizzieren Sie die Graphen von f und F für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.
- (d) Sei wieder $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$. Wie groß ist – sofern f wirklich die zufällige Zeit beschreibt, die Dozent K. zu früh kommt – die Wahrscheinlichkeit, dass Dozent K.
- i. weniger als zwei Minuten zu früh kommt?
 - ii. mehr als zehn Minuten zu früh kommt?

Lösung:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{für } 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

- (a) f Dichte \Rightarrow es muss gelten $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{!}{=} 1$
Somit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(x) dx}_{=0} + \int_0^{\alpha} f(x) dx + \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx}_{=0} \\ &= \int_0^{\alpha} \beta x dx = \frac{1}{2} \beta \alpha^2 - 0 \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\beta}}$$

($\alpha = -\sqrt{\frac{2}{\beta}}$ wäre zwar ebenfalls eine Lösung der Gleichung, allerdings ist α als positiv vorausgesetzt.)

(b) Für $t < 0$ ist $f(t) = 0$ und somit gilt für $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0.$$

Für $0 \leq x \leq 4$ erhalten wir

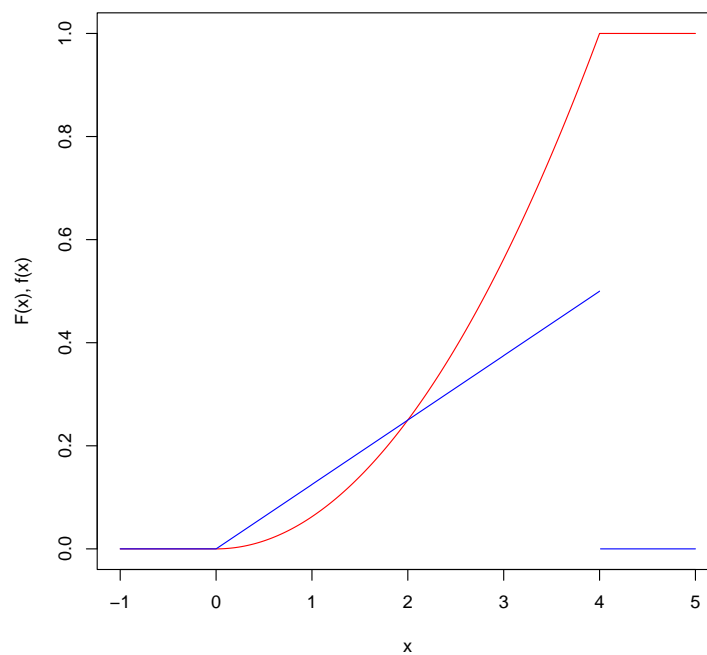
$$\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \beta t dt = \int_0^x \frac{1}{8} t dt = \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} t^2 \right]_{t=0}^x = \frac{1}{16} x^2.$$

Bleibt noch der Fall $x > 4$. Hier gilt

$$\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^4 f(t)dt + \int_4^x f(t)dt = 0 + \frac{1}{16} 4^2 + 0 = 1.$$

Somit gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{für } x > 4 \end{cases}$$



(c)

(d) Sei $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.

i.

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= \int_0^2 \frac{1}{8} x dx \\ &= \left[\frac{1}{16} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\&= 1 - \int_0^4 \frac{1}{8} x dx \\&= 1 - \left[\frac{1}{16} x^2 \right]_0^4 = 1 - 1 = 0.00\end{aligned}$$

Abgabe der Übung: Eine Woche nachdem das Übungsblatt zu Ihrem Übungstermin bearbeitet wurde, zu Beginn der nächsten Übung bei Ihrer Übungsgruppenleiterin oder bei Ihrem Übungsgruppenleiter.