Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Andreas Gärtner
Jens Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 09/10
8.12.2009

6. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 21 (3 Punkte)

Drei Spieler bekommen jeweils einen Hut aufgesetzt, dessen Farbe (rot oder blau) durch einen Münzwurf (Kopf oder Zahl) bestimmt wird. Die Spieler kennen die Farbe ihrer eigenen Kopfbedeckung nicht, sehen aber die Hüte ihrer Mitspieler. Die Kommunikation untereinander ist verboten. Nun muss jeder Spieler entweder die Farbe seines Hutes raten oder passen. Tippt mindestens einer der drei die richtige Farbe und setzt keiner auf die falsche, so gewinnt das Team einen Preis.
Bestimmen Sie unter Verwendung eines geeigneten Laplaceschen W–Raumes die Wahrscheinlichkeit für das Team, einen Preis zu gewinnen, wenn
a) einer der drei immer rot tippt und die anderen passen,
b) das Team vereinbart, dass nur derjenige einen Tipp abgibt, der bei seinen beiden Mitspielern dieselbe Farbe sieht. Ist diese rot, so tippt er auf blau und umgekehrt.
Hinweis: Erstellen Sie eine Tabelle.

Lösung: 3 Spieler jeweils einen Hut. Farbe vom Hut entweder rot oder blau (mit gleicher Wk. $p = 0.5$).

Laplacescher W-Raum (Ω, P) mit
$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{r, b\}(i = 1, 2, 3)\}$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

(a) Gesucht: Wk., einen Preis zu gewinnen, wenn einer der drei immer rot tippt und andere passen:

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{4}{|\Omega|} = \frac{4}{2^3} = 0.5 \mathrel{\hat{=}} 50\%$$

mit Anzahl günstiger Fälle anschaulich:

1. Spieler	2. Spieler	3. Spieler
r	r	r
r	r	b
r	b	r
b	r	r
r	b	b
b	r	b
b	b	r
b	b	b

Z.B. 1. Spieler hat 4 Möglichkeiten rot bzw. blau zu wählen $\Rightarrow$ Anzahl Möglichkeiten $= 4$.

(b) Gesucht: Wk., einen Preis zu gewinnen, wenn nur derjenige einen Tipp abgibt, der bei Mitspielern dieselbe Farbe sieht (Ist dies rot, so tippt er auf blau):

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{6}{|\Omega|} = \frac{6}{2^3} = 0.75 \mathrel{\hat{=}} 75\%$$

mit Anzahl günstiger Fälle anschaulich:

1. Spieler	2. Spieler	3. Spieler	1. Sp. tippt	2. Sp. tippt	3. Sp. tippt	Team gewinnt
r	r	r	b	b	b	NEIN
r	r	b	-	-	b	JA
r	b	r	-	b	-	JA
b	r	r	b	-	-	JA
r	b	b	r	-	-	JA
b	r	b	-	r	-	JA
b	b	r	-	-	r	JA
b	b	b	r	r	r	NEIN

Aufgabe 22 (3 Punkte)

Ein Zufallsgenerator erzeugt mit Ziffern aus $\{0, 1, ..., 9\}$ Ziffernblöcke der Länge 3. Geben Sie mit Begründung die Wahrscheinlichkeiten für folgende drei Ereignisse an:
a) alle Ziffern verschieden
b) genau ein Paar gleicher Ziffern
e) drei gleiche Ziffern
Berechnen Sie zur Kontrolle die Summe aller Wahrscheinlichkeiten.

Lösung: a)$\frac{\text{alle Ziffern verschieden}}{|\Omega|} = \frac{{}'10\cdot9\cdot8}{10^3} = \frac{720}{1000}$
b)$\frac{\text{genau ein Paar gleicher Ziffern}}{|\Omega|} = \frac{10\cdot9\cdot3}{1000} = \frac{270}{1000}$
c)$\frac{\text{drei gleiche Ziffern}}{|\Omega|} = \frac{10}{1000}$

Aufgabe 23 (3 Punkte)

Student S. hat die Zahlenkombination des Schlosses seines Koffers vergessen. Damit sich das Schloss öffnen lässt, müssen drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ jeweils richtig eingegeben werden.

Student S. versucht, das Schloss durch sukzessives Ausprobieren von rein zufällig gewählten Ziffernfolgen bestehend aus drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ zu öffnen. Da er ein schlechtes Gedächtnis hat, kann er sich die bisher eingegebenen Ziffernfolgen nicht merken, so dass er unter Umständen mehrmals die gleiche Ziffernfolge eingibt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei rein zufälligem Raten *einer* Ziffernfolge bestehend aus drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ die richtige Ziffernkombination zu erhalten?

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. genau bei der k–ten Eingabe einer Ziffernfolge zum ersten Mal die richtige Ziffernkombination eingibt? *Hinweis:* Betrachten Sie das k–malige Werfen eines Würfels mit 1000 Seiten, die mit den Zahlen 1 bis 1000 beschriftet sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel beim k–ten Wurf zum ersten Mal mit 1 oben landet?

c) Wie oben beschrieben versucht Student S. nun, dass Schloss durch sukzessive Eingabe von rein zufällig gewählten Ziffernfolgen zu öffnen. Für das Einstellen einer Ziffernfolge und das Probieren, ob sich das Schloss öffnet, benötigt Student S. 15 Sekunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. das Schloss innerhalb von zwei Stunden öffnen kann?

Hinweis: Für $q \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{N} q^i = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Lösung:

a) Als Grundmenge haben wir $\Omega = \{(x_1, x_2, x_2) : x_i \in \{0, \ldots, 9\}, i \in \{1, 2, 3\}\}$ und die Wahrscheinlichkeit für eine Menge $A \subset \Omega$ ist gegeben durch

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{10^3} = \frac{|A|}{1000}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Versuch die richtige Kombination zu treffen, ist also $\frac{1}{1000}$.

b) Für $k = 1$ wurde dies schon im ersten Aufgabenteil beantwortet. Sei deshalb $k > 1$. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Versuche bis zum ersten Treffer. Gesucht ist somit $P(X = k)$. Es gilt:

$$P(X = k) = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{1000}$$

c) Zwei Studen haben $2 \cdot 60 \cdot 60 = 7200$ Sekunden. Somit hat Student S höchstens $\frac{7200}{15} = 480$ Versuche. Mit den Bezeichnungen aus dem letzten Aufgabenteil ist also $P(X \leq 480)$ gesucht.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 480) &= \sum_{k=1}^{480} P(X = k) = \sum_{k=1}^{480} \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{1000} \\
&= \frac{1}{1000} \cdot \sum_{k=1}^{480} \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{k-1} = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{k=0}^{479} \left(\frac{999}{1000}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{1000} \cdot \frac{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{480}}{1 - \frac{999}{1000}} = 1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{480} \\
&= 0.38
\end{aligned}$$

Aufgabe 24 (3 Punkte)

Psychologin P untersucht den Einfluss von Gewaltspielen auf die Fahrfähigkeit. Unter anderem führt sie dabei folgende kontrollierte Studie durch: Sie teilt ihre 20 Testpersonen zufällig in zwei gleich große Gruppen, eine Studiengruppe und eine Kontrollgruppe. Jede Person aus einer der beiden Gruppen muss einen Fahrtest absolvieren, der nur die möglichen Ausgänge bestanden oder nicht bestanden hat. Die Personen der Studiengruppe müssen allerdings vorher einige Zeit lang ein Gewaltspiel spielen. Als Versuchsergebnis erhält sie, dass von den Personen der Studiengruppe 7 Personen den Test nicht bestanden haben, während aus der Kontrollgruppe nur eine Person den Test nicht bestanden hat. Kann man ausschließen, dass es sich dabei um Zufall handelt?

Hinweis: Gehen Sie von der Hypothese aus, dass das Testergebnis lediglich auf den „Zufall" zurückzuführen ist, d.h. dass 8 von den zwanzig Personen sowieso den Test nicht bestanden hätten und beim zufälligen Aufteilen der Personen in die beiden Gruppen, in der Studiengruppe mindestens 7 davon landen. Die Hypothese verwerfen Sie, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür kleiner als 0.05 ist.

Lösung: Insgesamt gibt es $\binom{20}{10}$ Möglichkeiten aus 20 Personen 10 Personen zufällig ohne Beachtung der Reihenfolge (und ohne zurücklegen) auszuwählen. Gehen wir davon aus, dass wirklich zufällig ausgewählt wird, sind alle diese Kombinationen gleich wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit, dass dann mindestens 7 Personen, die den Test nicht bestehen (von 8), in der Studiengruppe landen ist

$$\frac{\binom{8}{7}\cdot\binom{12}{3}+\binom{8}{8}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{20}{10}} = \frac{8\cdot 220+1\cdot 66}{184756} = 0,0099$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist kleiner als $0,05$, demnach kann die Hypothese verworfen werden, d.h. das Ergebnis kam nicht zufällig zustande.

Abgabe der Übung: Eine Woche nachdem das Übungsblatt zu Ihrem Übungstermin bearbeitet wurde, zu Beginn der nächsten Übung bei Ihrer Übungsgruppenleiterin oder bei Ihrem Übungsgruppenleiter.