Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Andreas Gärtner
Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
1.12.2009

5. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 17 (3 Punkte)

Wir betrachten das Zufallsexperiment des werfens zweier echten Würfel. Ergebnis des Zufallsexperiments ist das Paar (ω_1, ω_2) der gefallenen Augenzahlen, wobei ω_1 die Zahl auf dem ersten Würfel und ω_2 die Zahl auf dem zweiten Würfel ist.

a) Bestimmen Sie die Grundmenge des Zufallsexperiments.

b) Geben Sie jeweils das Ereignis an für:

- “Es fällt zwei Mal die Eins.”
- “Es fällt ein Mal die Drei.”
- “Die Summe der Augenzahlen ist 7.”
- “Die Augenzahl beider Würfel ist gerade.”

Lösung: a) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

b)

- $A = \{(1, 1)\}$
- $B = \{(3, \omega_2) : \omega_2 \in \{1, 2, 4, 5, 6\}\} \cup \{(\omega_1, 3) : \omega_1 \in \{1, 2, 4, 5, 6\}\}$
- $C = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 + \omega_2 = 7\}$
- $D = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{2, 4, 6\}\}$

Aufgabe 18 (3 Punkte)

a) Handelt es sich bei der nächsten Bundestagswahl um ein Zufallsexperiment im Sinne der Vorlesung? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Für das Zufallsexperiment „Werfen einer Münze“ betrachten wir die Grundmenge $\{z, w\}$, wobei 'z' für 'Zahl liegt oben' und 'w' für 'Wappen liegt oben' steht. Ist dann $\{z, w\}$ ein Ereignis? Ist $\{z, w\}$ ein Elementarereignis? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Ein Würfel wird 100 mal geworfen. Dabei fällt 22 mal eine Fünf und 17 mal eine Sechs. Bestimmen Sie die relative und die absolute Häufigkeit für das Ereignis „der Würfel zeigt eine Fünf oder eine Sechs“.

d) Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Kann es eine Teilmenge $A \subset \Omega$ geben, mit

$$P(A \cup \bar{A}) > 1?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Nein, da man das Experiment nicht beliebig oft wiederholen kann.

(b) Da es sich bei $\{z, w\}$ um eine Teilmenge der Grundmenge handelt, ist es ein Ereignis. Es ist aber kein Elementarereignis, da die Menge mehr als ein Element enthält.

(c) Für die absolute Häufigkeit erhalten wir $22 + 17 = 39$. Die relative Häufigkeit ist $\frac{39}{100}$.

(d) Eine solche Teilmenge kann es nicht geben. Denn für eine beliebige Teilmenge $A \subset \Omega$ gilt:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A \cup (\Omega \setminus A)) = P(\Omega) = 1.$$

Aufgabe 19 (3 Punkte)

Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie für $A, B, C \subseteq \Omega$ die Formel:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) \\ &+P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Lösung: Dreimaliges Anwenden von

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

auf die rechte Seite der Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) =& P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ =& P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap B \cup A \cap C) \\ =& P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ =& P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Aufgabe 20 (3 Punkte)

In der Mensa in Darmstadt warten 7 StudentInnen in einer Schlange vor dem Selbstbedienungsbuffet.

a) Auf wie viele verschiedene Arten lässt sich die Menschenschlange zusammensetzen?

b) 2 der 7 StudentInnen entscheiden sich für das angebotene Gericht Bandnudeln mit Meeresfrüchten. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl dieser 2 StudentInnen?

c) Angenommen, die zwei StudentInnen, die sich für Bandnudeln mit Meeresfrüchten entschieden haben, stehen direkt hintereinander. Wie viele Schlangen sind jetzt möglich?

Lösung:

a) Für den 1. Platz gibt es 7 verschiedene Möglichkeiten, da alle von den 7 StudentInnen den 1. Platz einnehmen können. Für den 2. Platz gibt es nur noch 6 verschiedene Möglichkeiten, da noch 6 StudentInnen übrig geblieben sind (einer von den 7 StudentInnen steht ja schon auf dem 1. Platz!) usw.... usw... Somit gibt es $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ verschiedene Arten der Zusammensetzung.

b) Zwei StudentInnen aus 7 StudentInnen auswählen:
$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = 21$

c) Anzahl der möglichen "Standplätze" für die zwei StudentInnen: 6. Anzahl der verschiedenen Anordnungen der zwei StudentInnen auf jeden der 6 möglichen "Standplätze":
$2! = 2$
Anzahl der verschiedenen Anordnungen der restlichen 5 StudentInnen auf jeden der übrigen 5 Plätze:
$5! = 120$
Insgesamte Anzahl der möglichen Schlangen:
$6 \cdot 2! \cdot 5! = 1440$

Abgabe der Übung: Eine Woche nachdem das Übungsblatt zu Ihrem Übungstermin bearbeitet wurde, zu Beginn der nächsten Übung bei Ihrer Übungsgruppenleiterin oder bei Ihrem Übungsgruppenleiter.