Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Andreas Gärtner
Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
10./11.02.2010

12. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 45

Gegeben sei die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:

x	0,00	0,85	1,00	1,29	1,65	1,96	2,00	2,33	3,00
$\Phi_{0;1}(x)$	0,5000	0,8023	0,8413	0,9015	0,9505	0,9750	0,9773	0,9901	0,9987

Lesen Sie für eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable Z die Werte $a, b, c \in \mathbb{R}$ aus obiger Tabelle heraus:

(a) $P(|Z| \leq a) \geq 0,95$.

(b) $P(Z \leq b) \geq 0,99$.

(c) $P(|Z| > c) \leq 0,10$.

Lösung:

(a) Da die Dichte der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung achsensymmetrisch ist, gilt $P[Z < -a] = P[Z > a]$. Außerdem ist allgemein $P[Z > a] = 1 - P[Z \leq a]$ und wir erhalten:

$$P(|Z| \leq a) = P[Z \leq a] - P[Z < -a] = 2 \cdot P[Z \leq a] - 1 = 2 \cdot \Phi_{0;1}(a) - 1 \geq 0,95$$

uns somit soll $\Phi_{0;1}(a) \geq 0,975$ sein, woraus $a \geq 1,96$ folgt.

(b) Direktes Ablesen liefert $b \geq 2,33$.

(c) Wir möchten ein c finden, so dass $P(|Z| > c) = 1 - P(|Z| \leq c) \leq 0,10$ bzw. $P(|Z| \leq c) \geq 0,90$. Analog zu (a) soll also $2 \cdot P[Z \leq c] \geq 0,90$ und damit $\Phi_{0;1}(a) \geq 0,95$ gelten. Es folgt $c \geq 1,65$.

Aufgabe 46

Im Rahmen einer Studie soll die Wirksamkeit einer neuen Unterrichtsmethode überprüft werden. Dazu wird die Leistungsfähigkeit der Schüler anhand mehrerer Kriterien beurteilt, die dann zu einem Leistungsindex zusammengefasst werden. Es ist bekannt das nach der herkömmlichen Methode unterrichtete Schüler im Mittel den Leistungsindex 40 erreichen. Die mittlere quadratische Abweichung liegt bei 100. Bei 400 nach der neuen Methode unterrichteten Schülern betrug der Leistungsindex im Mittel 42.

Wir wollen nun wissen, ob die Ergebnisse der neuen Methode überhaupt nennenswert von den Ergebnissen der bisherigen Methode abweicht. Dabei gehen wir davon aus, dass der Leistungsindex normalverteilt ist. Normalerweise müssten wir hierfür (wegen der geschätzten Varianz) einen t-Test durchführen. Da die Stichprobe aber sehr groß ist, können wir hier einen Gauß-Test anwenden.

(a) Führen Sie mit den oben gemachten Angaben einen Gauß-Test bzgl. der Hypothesen

$$H_0 : \mu = 40 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq 40$$

zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch.

(b) Welche Schlussfolgerungen lassen sich aufgrund des Testergebnisses aus Aufgabenteil (a) im Hinblick auf die Wirksamkeit der neuen Unterrichtsmethode ziehen?

Lösung:

(a) Wir verwenden folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung: Seien $X_1, \ldots, X_{400}$ unabhängig und identisch $N(\mu, 10)$-verteilt. Über die Realisierungen dieser Zufallsvariablen wissen wir, dass $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 42$. Wir testen also auf

$$H_0 : \mu = 40 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq 40$$

und lehnen H_0 ab, falls $\bar{x}$ sehr weit von 40 abweicht.
Wäre $\mu = 40$, so wäre die Zufallsvariable

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 40\right)$$

standardnormalverteilt (d.h. $N(0,1)$-verteilt).
Es gilt

$$P(|Z| \leq 1.96) \;\geq\; 0.95 \quad \text{bzw.} \quad P(|Z| > 1.96) \;\leq\; 0.05$$

und somit ergibt sich

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\bar{x} - \mu_0)\right| = \left|\frac{20}{10}(42 - 40)\right| = 4 > 1.96.$$

was zur Ablehnung von H_0 führt.

(b) Der Test sagt lediglich aus, dass die Ergebnisse der neuen Methode signifikant von den Ergebnissen der alten Methode abweichen. Aus dem Test lässt sich aber nicht schließen, dass das neue Verfahren besser ist als das alte. Dazu hätte ein einseitiger Gauß-Test durchgeführt werden müssen.

Aufgabe 47

Beim einseitigen Gauß-Test ist eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ einer Normalverteilung mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ_0^2 gegeben und zu testen ist für ein gegebenes $\mu_0 \in \mathbb{R}$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

zu gegebenem Niveau $\alpha \in (0,1)$. Dabei wird H_0 abgelehnt, falls

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu_0\right)$$

größer ist als das α-Fraktil u_α von $\mathcal{N}(0,1)$. Wie müssen Sie diesen Test abändern, um damit

$$\bar{H}_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad \text{versus} \qquad \bar{H}_1 : \mu < \mu_0$$

zu Niveau $\alpha \in (0,1)$ zu testen?

Hinweis: Sprechen jetzt große oder kleine Werte von $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ für die Gültigkeit von $\bar{H}_0$.

Lösung: In der neuen Situation sprechen große Werte von $\bar{x}$ eher für die Gültigkeit von $\bar{H}_0$. Also werden wir uns gegen $\bar{H}_0$ entscheiden, falls das arithmetische Mittel der Stichprobe zu klein ist. Da auch in dieser Situation

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{n}}{s} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \mu \right)$$

annähernd $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt ist, lehnen wir $\bar{H}_0$ ab, falls $T(x_1, \ldots, x_n) < u_{1-\alpha}$ ist, wobei $u_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Fraktil von $\mathcal{N}(0,1)$ ist.

Aufgabe 48

Psychologin P. hat einen Test zur Überprüfung der Konzentrationsfähigkeit entwickelt. Dabei spricht eine hohe Punktzahl für eine hohe Konzentration. Im Durchschnitt haben bisher alle Probanden 48 Punkte erreicht.
Nun will P. überprüfen, ob sich Schlafmangel negativ auf die Konzentrationsfähigkeit auswirkt. Dazu hat sie $n = 20$ Probanden gebeten in der Nacht vor dem Test maximal 4 Stunden zu schlafen. Bei dieser Testreihe wurden von den 20 Teilnehmern durchschnittlich 44.3 Punkte bei einer empirischen Standardabweichung von $s = 4.3$ erreicht.
Nehmen Sie vereinfachend an, das es sich dabei um eine Stichprobe einer Normalverteilung handelt und ermitteln Sie mit Hilfe eines geeigneten Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob die Konzentrationsfähigkeit in der Tat durch Schlafmangel abnimmt.

Hinweis: Ist Z eine t_{19}-verteilte Zufallsvariable, so gilt

$$P(Z \leq -1.729) \;\leq\; 0.05.$$

Lösung: Wir wollen die Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 48 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu < 48$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$ testen. Da wir hier bei relativ geringem Stichprobenumfang ($n = 20$) die Varianz aus den gegebenen Daten schätzen müssen, können wir keinen Gauß-Test anwenden. Stattdessen verwenden wir den einseitigen t-Test (für eine Stichprobe).
Beim t-Test müssen wir anstelle der Normalverteilung die t_{n-1}-Verteilung für unsere Testgröße $\frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{x} - \mu)$ verwenden (hier ist $n = 20$, also verwenden wir die t_{19}-Verteilung).
Weiter ist nach dem Hinweis für eine t_{19}-verteilte Zufallsvariable Z

$$P(Z \leq -1.729) \;\leq\; 0.05.$$

Es gilt:

$$\frac{\sqrt{n}}{s} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \mu \right) \approx \frac{\sqrt{20}}{4.3} (44.3 - 48) \approx 1.0400 \cdot (-3.7) \approx -3.8481 < -1.729,$$

d.h. H_0 kann abgelehnt werden.