Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Andreas Gärtner
Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
27./28.01.2010

10. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 37 (3 Punkte)

(a) Für die Zufallsvariable X gelte:

$$\mathbf{P}\{X=2\}=0.3, \mathbf{P}\{X=4\}=0.4, \mathbf{P}\{X=5\}=0.3.$$

Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariablen X.

(b) Sei Y eine $U(1,2)$-verteilte und sei Z eine von Y unabhängige $U(0,4)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Varianz von $Y+Z$.

Lösung:

(a) Für eine diskrete Zufallsvariable X, die nur die Werte $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ annimmt, gilt:

$$\mathbf{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbf{P}[X=x_k].$$

Da X nur die Werte $2, 4$ und 5 mit einer Wahrscheinlichkeit größer 0 annimmt, ergibt obige Formel:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= 2\cdot\mathbf{P}[X=2]+4\cdot\mathbf{P}[X=4]+5\cdot\mathbf{P}[X=5] \\
&= 2\cdot 0.3+4\cdot 0.4+5\cdot 0.3=3.7 \\
\mathbf{E}X^2 &= 2^2\cdot\mathbf{P}[X=2]+4^2\cdot\mathbf{P}[X=4]+5^2\cdot\mathbf{P}[X=5] \\
&= 4\cdot 0.3+16\cdot 0.4+25\cdot 0.3=1.2+6.4+7.5=15.1 \\
\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}[X^2]-(\mathbf{E}X)^2=15.1-(3.7)^2=15.1-13.69=1.41
\end{aligned}$$

(b) Laut Vorlesung gilt für eine $U(a,b)$-verteilte Zufallsvariable A

$$\mathbf{Var}(A)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Also

$$\mathbf{Var}(Y)=\frac{(2-1)^2}{12}=\frac{1}{12}$$

und

$$\mathbf{Var}(Z)=\frac{(4-0)^2}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

und wegen der Unabhängigkeit von Y und Z ergibt sich

$$\mathbf{Var}(Y+Z)=\mathbf{Var}(Y)+\mathbf{Var}(Z)=\frac{1}{12}+\frac{16}{12}=\frac{17}{12}.$$

Aufgabe 38 (3 Punkte)

Die Zufallsvariable X ist stetig verteilt mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{für } 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung: Der Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^2 x \frac{3}{4} x(2-x) dx \\ &= \int_0^2 \frac{3}{4} \cdot 2x^2 dx - \int_0^2 \frac{3}{4} x^3 dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} x^3 \Big|_{x=0}^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_{x=0}^2 \\ &= \frac{6}{12} \cdot 8 - \frac{3}{16} \cdot 16 \\ &= 1 \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^2 \frac{3}{4} \cdot 2x^3 dx - \int_0^2 \frac{3}{4} x^4 dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} x^4 \Big|_{x=0}^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_{x=0}^2 \\ &= \frac{6}{16} \cdot 16 - \frac{3}{20} \cdot 32 \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

womit die Varianz

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}X &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}X)^2 \\ &= \frac{6}{5} - 1 \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

ist.

Aufgabe 39 (3 Punkte)

In einer Urne befinden sich 5 Kugeln. Jede der Kugeln ist entweder weiß oder schwarz. Wir ziehen dreimal jeweils eine Kugel mit Zurücklegen und erhalten folgendes Ergebnis: weiß, schwarz, schwarz.

Gesucht ist die Anzahl $\theta \in \{0, \ldots, 5\}$ der schwarzen Kugeln. Die Zufallsvariable X_i habe den Wert 1, falls bei der i-ten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wurde und Null sonst (für $i = 1, 2, 3$). Die Idee beim Maximum-Likelihood-Prinzip ist es, den Parameter θ so zu wählen, dass die Wahrscheinlichkeit für das oben angegebene Ziehungsergebnis maximal ist. Dabei kann man davon ausgehen, dass die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 unabhängig und identisch verteilt sind. Bei obiger Ziehung wurde für X_1 der Wert 0, für X_2 der Wert 1 und für X_3 der Wert 1 beobachtet.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_1 in Abhängigkeit von θ.

(b) Bestimmen Sie dasjenige θ für $\theta \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, für das die Funktion

$$L(\theta) = \mathbf{P}_\theta[X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1]$$

maximal wird.

Bemerkung: Mit L bezeichnen wir die *Maximum-Likelihood-Funktion*.

Lösung:

(a) Aufgrund der Art des Urnenexperiments handelt es sich um eine Binomialverteilung mit $n = 1$. Es ist also lediglich p zu bestimmen. Sind in der Urne θ schwarze Kugel, so ist die Wahrscheinlichkeit zufällig eine schwarze Kugeln zu ziehen $\frac{\theta}{5}$. Somit folgt:

$$p = \mathbf{P}_\theta\{X_1 = 1\} = \frac{\theta}{5}.$$

(b) Aufgrund des Ergebnisses bei der Ziehung reicht es, die Fälle $\theta \in \{1, 2, 3, 4\}$ zu betrachten (da für $\theta = 0$ bzw. $\theta = 5$ obiges Ziehungsergebnis nicht auftreten kann). Wegen der Unabhängigkeit gilt

$$L(\theta) = \mathbf{P}_\theta[X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1] = \mathbf{P}_\theta[X_1 = 0] \cdot \mathbf{P}_\theta[X_2 = 1] \cdot \mathbf{P}_\theta[X_3 = 1] = (1 - p) \cdot p \cdot p$$

$$\begin{aligned}
L(1) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125} \\
L(2) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{125} \\
L(3) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125} \\
L(4) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{125}
\end{aligned}$$

Da $L(3)$ maximal ist, entscheiden wir uns für $\theta = 3$.

Aufgabe 40 (3 Punkte)

Drei perfekten Schützen stehen drei unschuldige Enten gegenüber. Jeder Schütze wählt zufällig und unbeeinflusst von den anderen Schützen eine Ente aus, auf die er schießt. Sei X die zufällige Zahl überlebender Enten. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X unter Verwendung der Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^{3} X_i, \text{ wobei } X_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls Ente } i \text{ überlebt} \\ 0 & \text{, falls Ente } i \text{ nicht überlebt} \end{cases}$$

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{X_i = 1\} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{E}(X_i) = 1 \cdot \mathbf{P}\{X_i = 1\} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0,296 \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right) \approx 3 \cdot 0,296 = 0.89 \end{aligned}$$

Für die Varianz gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}[(X_1 + X_2 + X_3)^2] - (\mathbf{E}X)^2 \\ &= \mathbf{E}[X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 + 2X_2X_3] - (\mathbf{E}X)^2 \\ &= \mathbf{E}[X_1^2] + \mathbf{E}[X_2^2] + \mathbf{E}[X_3^2] + 2\mathbf{E}[X_1X_2] + 2\mathbf{E}[X_1X_3] + 2\mathbf{E}[X_2X_3] - (\mathbf{E}X)^2 \end{aligned}$$

und wir berechnen für $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{E}[X_i^2] = 1^2 \cdot \mathbf{P}\{X_i = 1\} = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Zur Berechnung von $\mathbf{E}[X_iX_j]$ mit $i \neq j$ überlegen wir uns zunächst, dass $X_i \cdot X_j = 1$ genau dann, wenn Ente i und Ente j überleben, wenn also alle drei Jäger auf die verbleibende dritte Ente schießen, was mit einer Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}\{X_iX_j = 1\} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ geschieht. In allen anderen Fällen ist $X_iX_j = 0$. Damit folgt

$$\mathbf{E}[X_iX_j] = 1 \cdot \mathbf{P}\{X_iX_j = 1\} = \frac{1}{27}$$

und somit

$$\mathbf{Var}(X) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 6 \cdot \frac{1}{27} - \left(3 \cdot \frac{8}{27}\right)^2 \approx 0.321$$