Minitest XIII

Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ von unabhängig identisch normalverteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ_0^2. Sei $\alpha \in (0, 1)$ und $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

Wie modifiziert man den einseitigen Gauß-Test so, dass er ein Test zum Niveau α für

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

ist ?

Hinweis: Sprechen nun große oder kleine Werte von

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

für die Gültigkeit von H_1 ?

Da nun kleine Werte von

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

für die Gültigkeit von H_1 sprechen, setzen wir den Test an gemäß

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu_0\right) \le c, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit dies ein Test zum Niveau α wird, wählen wir c so, dass gilt:

$$\alpha = \mathbf{P}_{\mu=\mu_0}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu_0\right) \le c\right] = \Phi(c),$$

wobie Φ die Vf. von $N(0,1)$-ist. Also wählen wir c als $(1-\alpha)$-Fraktil $u_{1-\alpha}$ von $N(0,1)$.