Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 10.7.2009

Höhere Mathematik II

Probeklausur mit Lösungshinweisen

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Fachrichtung: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60	
err. Punktzahl								

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4-* **Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

(1) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 5 Punkte erhalten, wenn alle fünf Kästchen richtig beantwortet sind. Für jede falsche Antwort erhalten Sie einen Punkt Abzug. Sie können minimal 0 Punkte erhalten.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

- ☐ $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow f$ hat ein Maximum in (x_0, y_0).
- ☐ $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow f$ hat ein Minimum in (x_0, y_0).
- ☐ $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f$ hat ein Minimum in (x_0, y_0).
- ☒ f hat eine Extremstelle in $(x_0, y_0) \Rightarrow \operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0,0)$.
- ☐ f hat ein Maximum in $(x_0, y_0) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0$.

(b) Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + 2z & = 1, \\ x + 3y - z & = 1, \\ x - z & = 0. \end{cases}$$

Welche der folgenden Mengen ist die Lösungsmenge des Systems:

- ☐ $\{(0,0,0)\}$,
- ☐ $\{(t, -t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
- ☐ $\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$,
- ☒ $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$,
- ☐ $\left\{\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)\right\}$.

(2) (10 Punkte)

Sei $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x\sqrt{y}$, $x \in \mathbb{R}, y > 0$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f. (2)

(b) Berechnen Sie die Hessematrix $H(f;(x,y))$ von f. (2)

(c) Geben Sie alle lokalen Extrema von f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ an. (3)

(d) Bestimmen Sie die Art aller lokalen Extrempunkte von f . (3)

LÖSUNG:

(a) Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2\sqrt{y}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{x}{\sqrt{y}}$. Damit ist der Gradient von f

$$\nabla f(x,y) = \left(2x - 2\sqrt{y}, 2y - x\sqrt{y}^{-1}\right).$$

(b) Die zweiten Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sqrt{y}^{-1}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2 + \frac{1}{2} x y^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sqrt{y}^{-1}.
\end{aligned}$$

Die Hessematrix ist

$$H(f;(x,y)) = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{y}^{-1} \\ -\sqrt{y}^{-1} & 2 + \frac{1}{2} x y^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

(c) Aus der Gleichung $\nabla f = (0,0)$ folgt $2x - 2\sqrt{y} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ und $2y - x\sqrt{y}^{-1} = 0$ $\Rightarrow y^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{2}$. Es folgt das $y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{y} \Rightarrow$ Entweder ist $y = x = 0$ (aber das ist nicht erlaubt) oder $y = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es folgt, dass f genau einen kritischen Punkte in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ hat:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right).$$

(d) Die Hessematrix in diesem Punkte P ist

$$H\left(f;\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)\right) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 + \frac{1}{2}\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige quadratische Form ist

$$\begin{aligned}
Q(x,y) &= 2x^2 - \sqrt{2}xy + 3y^2 \\
&= 2\left\{x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}xy + \frac{3}{2}y^2\right\} \\
&= 2\left\{\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}y\right)^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{3}{2}y^2\right\} \\
&= 2\left\{\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}y\right)^2 + \frac{11}{8}y^2\right\}
\end{aligned}$$

also ist die Hesematrix positiv definit, somit ist der Punkt P ein Minimum.

(3) (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$f(r,\theta,z) = \left(r\cos^2\theta, r\tan\theta, z^2\right).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobimatrix $J(f;(r,\theta,z))$ für f. (7)

(b) Berechnen Sie die Determinante von $J(f;(r,\theta,z))$. (3)

LÖSUNG:

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial r} &= \cos^2\theta, & \tfrac{\partial f_1}{\partial \theta} &= -2r\cos\theta\sin\theta, & \frac{\partial f_1}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} &= \tan\theta, & \tfrac{\partial f_2}{\partial \theta} &= \tfrac{r}{\cos^2\theta}, & \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} &= 0, & \tfrac{\partial f_3}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial f_3}{\partial z} &= 2z. \end{aligned}$$

Es folgt, dass die Jacobimatrix ist

$$J(f;(r,\theta,z)) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & -2r\sin\theta\cos\theta & 0 \\ \tan\theta & \frac{r}{\cos^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos^2\theta & -2r\sin\theta\cos\theta & 0 \\ \tan\theta & \frac{r}{\cos^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{vmatrix} &= 2z \begin{vmatrix} \cos^2\theta & -2r\sin\theta\cos\theta \\ \tan\theta & \frac{r}{\cos^2\theta} \end{vmatrix} \\ &= 2z\left(\cos^2\theta \cdot \frac{r}{\cos^2\theta} + 2r\sin\theta\cos\theta\tan\theta\right) \\ &= 2z\left(r + 2r\sin^2\theta\right) \\ &= 2rz\left(1 + 2\sin^2\theta\right). \end{aligned}$$

(4) (10 Punkte)

Finden Sie heraus, welche von folgenden Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ ein Potential besitzen und geben Sie dies in diesen Fällen an:

(a) $f(x,y) = \left(x^2 - y, y - x\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$ (3)

(b) $g(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$ (4)

(c) $h(x,y) = (xe^{yx}, ye^{xy}), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$ (3)

LÖSUNG:

(a) Es gilt $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -1 = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ und $\mathbb{R}^2$ ist sternförmig. Deswegen gibt es ein Potential φ. Dieses muss $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^2 - y$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y - x$ erfüllen. Es folgt, dass $\varphi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + c(y)$ und dann bekommt man $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x + c'(y) = y - x \Rightarrow c'(y) = y \Rightarrow c(y) = \frac{1}{2}y^2 + c$ und das Potential für f ist

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + \frac{1}{2}y^2 + c$$

wobei c eine beliebige Konstant ist.

(b) Hier ist das Gebiet nicht sternförmig, deswegen proberien wir es direkt mit der Annahme, dass ein Potential ψ existiert. Dann gilt $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \psi(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + c(y)$ aber $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}$. Es folgt, dass

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

ein Potential für g in dem Gebiet $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ ist.

(c) Es gilt $\frac{\partial h_1}{\partial y} = x^2 e^{xy}$ und $\frac{\partial h_2}{\partial x} = y^2 e^{xy} \neq \frac{\partial h_1}{\partial y}$ somit gibt es kein Potential.

(5) (10 Punkte)

Sei $f(t) = \frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}$. Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [1,4] \to \mathbb{R}^2$ die durch $\gamma(t) = (t, f(t))$ definiert wird.

LÖSUNG:

Es gilt $f'(t) = \sqrt{t-1}$ und $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + |f'(t)|^2} = \sqrt{1+t-1} = \sqrt{t}$. Es folgt, dass die Länge der Kurve γ

$$l = \int_1^4 |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_1^4 \sqrt{t} dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} ist.$$

(6) (10 Punkte)

Sei $b_1 = (1,0,0,0)^T$, $b_2 = (0,1,1,1)^T$, $b_3 = (0,1,1,0)^T$.

(a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind. (3)

(b) Ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^4$? Falls nicht, geben Sie noch einen Vektor b_4 an, so dass $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^4$ ist. (3)

(c) Geben Sei eine beliebige lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ an, die den Vektor b_1 auf b_2 abbildet. Geben Sie die darstellende Matrix von φ bezüglich der Standardbasis an. (4)

LÖSUNG:

(a) Man stell einfach die Matrix auf, die die Vektoren als Zeilen habt und führt dann diese Matrix mit Hilfe des Gaussverfahren in die Driecksform über.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \quad r_3 \to r_3 - r_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix Rang 3 hat, sind die Vektoren linear unabhängig.

(b) Da die Dimension von $\mathbb{R}^4$ vier ist und die Vektoren $\{b_1, b_2, b_3\}$ nur drei sind können diese keine Basis sein. Ein vierter linear unabhängiger Vektor ist z.B. $b_4 = (0, 0, 1, 0)$ (sieht man einfach aus der Drieckmatrix oben). Dann sind $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ vier linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^4$ und bilden deswegen eine Basis für den $\mathbb{R}^4$.

(c) Weil $b_1 = e_1$ und somit der erste Basisvektor in der Standardbasis ist, wissen wir, dass $\varphi(e_1) = b_2$, d.h. in der darstellenden Matrix für φ ist die erste Spalte einfach b_1. Der Rest ist beliebig. D.h. die darstellende Matrix ist z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$