**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 5.8.2009

# Höhere Mathematik II

## Klausur 03.08.2009 mit Lösungshinweisen

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: __________

Vorname: __________

Matr.-Nr.: __________

Fachrichtung: __________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Gesamt | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mögl. Punktzahl | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 60 | |
| err. Punktzahl | | | | | | | | |

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4-* **Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

**( 1) (10 Punkte)**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 5 Punkte erhalten, wenn alle fünf Kästchen richtig beantwortet sind. Für jede falsche Antwort erhalten Sie einen Punkt Abzug. Sie können minimal 0 Punkte erhalten.

(a) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld, $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$.

- ☐ $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow F$ hat ein Potential $\varphi$ in $\mathbb{R}^2$.
- ☐ $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow F$ hat ein Potential $\varphi$ in $\mathbb{R}^2$.
- ☐ $F$ hat ein Potential $\varphi$ in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ $F$ hat ein Potential $\varphi$ in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow F = \operatorname{div}\varphi$.
- ☐ $F$ hat ein Potential $\varphi$ in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow F = \operatorname{grad}\varphi$.

(b) Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x+y+z & = 1, \\ 2x+3y-z & = 0, \\ x+z & = 0. \end{cases}$$

Welche der folgenden Mengen ist die Lösungsmenge des Systems:

- ☐ $\{(0,0,0)\}$,
- ☐ $\{(t,-t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
- ☒ $\{(-1,1,1)\}$,
- ☐ $\{(1,1,-1)\}$,
- ☐ $\{(2,1,-2)\}$.

**( 2) (10 Punkte)**

Sei $f(x,y,z) = xy + zx + yz$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f$. (3)

(b) Berechnen Sie die Hessematrix $H(f)$ von $f$. (3)

(c) Hat $f$ ein lokales Maximum oder Minimum? (4)

LÖSUNG:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x+z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x+y \Rightarrow \nabla f = (y+z, x+z, x+y)$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla \frac{\partial f}{\partial x} &= (0,1,1), \\
\nabla \frac{\partial f}{\partial y} &= (1,0,1), \\
\nabla \frac{\partial f}{\partial z} &= (1,1,0).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass die Hessematrix

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ist.$$

(c) Aus der Gleichung $\nabla f = (y+z, x+z, x+y) = (0,0,0)$ folgt $z = -y$ und $x = -z = y$ aber auch $x = -y \Rightarrow x = y = z = 0$. Das einzige Kandidat für ein lokales Extrema ist damit der Nullpunkt. Man sieht auch einfach, dass die Matrix $H(f)$ indefinit ist, somit ist der Nullpunkt ein Sattelpunkt. Man kann das auch so sehen, dass $f(0,0,0) = 0$ und für jede $\varepsilon > 0$ gilt z.B. $f(\varepsilon, \varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$ und $f(-\varepsilon, \varepsilon, 0) = -\varepsilon < 0$ deswegen kann der Nullpunkt weder Maxima oder Minima sein.

**( 3) (10 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$f(r, \theta, z) = \left(r^2 \cos\theta, r^2 \sin\theta, z\right).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobimatrix $J(f; (r, \theta, z))$ von $f$. (7)

(b) Berechnen Sie die Determinante von $J(f; (r, \theta, z))$. (3)

LÖSUNG:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial r} &= 2r\cos\theta, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -r^2 \sin\theta, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial r} &= 2r\sin\theta, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = r^2 \cos\theta, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial f_3}{\partial r} &= \frac{\partial f_3}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1.
\end{aligned}$$

Damit ist die Jacobimatrix

$$J\left(f;(r,\theta)\right)=\begin{pmatrix} 2r\cos\theta & -r^2\sin\theta & 0 \\ 2r\sin\theta & r^2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Determinante von $J\left(f;(r,\theta)\right)$ ist einfach

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2r\cos\theta & -r^2\sin\theta & 0 \\ 2\sin\theta & r^2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix} 2r\cos\theta & -r^2\sin\theta \\ 2r\sin\theta & r^2\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= 2r\cos\theta\cdot r^2\cos\theta + r^2\sin\theta\cdot 2r\sin\theta \\ &= 2r^3\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) = 2r^3. \end{aligned}$$

**( 4) (10 Punkte)**

Finden Sie heraus welche der folgenden Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ ein Potential besitzen und geben Sie dies in diesen Fällen an:

(a) $f(x,y)=(2x,-2y)\,,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$ (3)

(b) $g(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{xy}{x^2+y^2},\frac{y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$ (4)

(c) $h(x,y)=\left(\cos(\pi x)\cos(\pi y)\,,-\sin(\pi x)\sin(\pi y)\right),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$ (3)

LÖSUNG:

(a) Weil $\mathbb{R}^2$ sternförmig ist und $\frac{\partial}{\partial y}(x)=0=\frac{\partial}{\partial x}(y)$ gibt es ein Potential $\varphi$. Diese erfüllt dann $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x\Rightarrow\varphi(x,y)=x^2+c(y)\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial y}=c'(y)=-2y\Rightarrow c(y)=-y^2+c$, d.h. $f$ hat ein Potential

$$\varphi(x,y)=x^2-y^2+c$$

für eine beliebige Konstante $c$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial y} &= x\frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right)-y(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=x\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} &= \frac{-2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

und weil $\frac{\partial g_1}{\partial y} \neq \frac{\partial g_2}{\partial x}$ hat $g$ kein Potential in $\mathbb{R}^2$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial y} &= -\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y)\\ \frac{\partial h_2}{\partial x} &= -\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y)\end{aligned}$$

und weil die beide übereinstimmen und das Gebiet $\mathbb{R}^2$ sternförmig ist gibt es ein Potential $\psi$. Diese muss erfüllen: $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \cos(\pi x)\cos(\pi y) \Rightarrow \psi(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\cos(\pi y) + c(y) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial y} &= -\sin(\pi x)\sin(\pi y) + c'(y)\\ &= -\sin(\pi x)\sin(\pi y)\end{aligned}$$

$\Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c$ eine Konstante. Es folgt, dass $h$ ein Potential

$$\psi(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\cos(\pi y) + c$$

mit einer beliebigen Konstanten $c$ in $\mathbb{R}^2$ hat.

**( 5) (10 Punkte)**

Die Einheitsscheibe rolle reibungsfrei auf der $x$-Achse. Ein Punkt des Randes beschreibt dabei eine Zykloide. Diese Kurve wird durch $\gamma\colon (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ parametriziert. Berechnen Sie die Länge der Kurve.

LÖSUNG:

Es gilt $\dot\gamma(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und

$$\begin{aligned}|\dot\gamma(t)|^2 &= (1-\cos t)^2 + \sin t^2 = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\\ &= 2 - 2\cos t\\ &= 4\sin^2\frac{t}{2}\end{aligned}$$

es folgt, dass

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|\,dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt \\ &= 4\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= 8. \end{aligned}$$

**( 6) (10 Punkte)**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung.

(a) Geben Sie das Bild von $f_A$ an. (2)

(b) Geben Sie die Dimension des Bildes von $f_A$. (2)

(c) Geben Sie ein Basis für das Bild von $f_A$ an. (2)

(d) Berechnen Sie den Kern von $f_A$. (2)

(e) Geben Sie den Urbildvektor $f_A^{-1}((0,1,-1))$ von $(0,1,-1)$ an. (2)

LÖSUNG:

(a) Durch Definition ist das Bild von $f$ die Menge

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) &= \{A\vec{x} \,|\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

d.h. das Bild ist genau der Span von den Spaltenvektoren.

(b) Man sieht einfach, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, z.B. durch Gaussverfahren:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim r_3 \to r_3 - r_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Deswegen ist die Dimension vom Bild von $f$ genau 3.

(c) Ein Basis für das Bild sind dann z.B. die Vektoren $v_1, v_2, v_3$.

(d) Wir wissen aus dem Dimensionssatz, dass Dimension von Kern + Dimension von Bild = 3 aber die Dimension vom Bild ist 3, deswegen ist die Dimension vom Kern von $f$ null. D.h. $\mathrm{Kern}(f) = \{(0,0,0)\}$.

(e) Weil der Kern null ist, ist die Abbildung $f$ injektiv und aus der Definition von der darstellenden Matrix einer lineare Abbildung sieht man, dass $f(e_2) = (0,1,-1)$, d.h. das Urbild von $(0,1,-1)$ ist genau

$$f^{-1}((0,1,-1)) = (0,1,0).$$