Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 4.8.2009

Höhere Mathematik II
Klausur 03.08.2009

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Fachrichtung: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60	
err. Punktzahl								

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4-* **Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

(1) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 5 Punkte erhalten, wenn alle fünf Kästchen richtig beantwortet sind. Für jede falsche Antwort erhalten Sie einen Punkt Abzug. Sie können minimal 0 Punkte erhalten.

(a) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld, $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$.

- ☐ $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow F$ hat ein Potential φ in $\mathbb{R}^2$.
- ☐ $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow F$ hat ein Potential φ in $\mathbb{R}^2$.
- ☐ F hat ein Potential φ in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ F hat ein Potential φ in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow F = \mathrm{div}\varphi$.
- ☐ F hat ein Potential φ in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow F = \mathrm{grad}\varphi$.

(b) Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x+y+z & = 1, \\ 2x+3y-z & = 0, \\ x+z & = 0. \end{cases}$$

Welche der folgenden Mengen ist die Lösungsmenge des Systems:

- ☐ $\{(0,0,0)\}$,
- ☐ $\{(t,-t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
- ☐ $\{(-1,1,1)\}$,
- ☐ $\{(1,1,-1)\}$,
- ☐ $\{(2,1,-2)\}$.

(2) (10 Punkte)

Sei $f(x,y,z) = xy + zx + yz$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f. (3)

(b) Berechnen Sie die Hessematrix $H(f)$ von f. (3)

(c) Hat f ein lokales Maximum oder Minimum? (4)

(3) (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$f(r,\theta,z) = \left(r^2\cos\theta, r^2\sin\theta, z\right).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobimatrix $J(f;(r,\theta,z))$ von f. (7)

(b) Berechnen Sie die Determinante von $J(f;(r,\theta,z))$. (3)

(4) (10 Punkte)

Finden Sie heraus welche der folgenden Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ ein Potential besitzen und geben Sie dies in diesen Fällen an:

(a) $f(x,y) = (2x,-2y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$ (3)

(b) $g(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ (4)

(c) $h(x,y) = (\cos(\pi x)\cos(\pi y), -\sin(\pi x)\sin(\pi y)), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$ (3)

(5) (10 Punkte)

Die Einheitsscheibe rolle reibungsfrei auf der x-Achse. Ein Punkt des Randes beschreibt dabei eine Zykloide. Diese Kurve wird durch $\gamma\colon (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$ parametriziert. Berechnen Sie die Länge der Kurve.

(6) (10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung.

(a) Geben Sie das Bild von f_A an. (2)

(b) Geben Sie die Dimension des Bildes von f_A. (2)

(c) Geben Sie ein Basis für das Bild von f_A an. (2)

(d) Berechnen Sie den Kern von f_A. (2)

(e) Geben Sie den Urbildvektor $f_A^{-1}((0,1,-1))$ von $(0,1,-1)$ an. (2)