Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Juli, 2009

3. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

Abgabe: Mi 15.7. (oder Fr 17.7.), in der Übung

(H3.1)

Sei $L = \{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$ die Sprache der Arithmetik und sei

$$T = Th(\mathbb{N}, +, \cdot, \leqslant 0, 1)$$

die Menge der Formeln in der Sprache L, die wahr sind in den natürlichen Zahlen. Wie in der Vorlesung besprochen hat T auch Modelle die verschieden sind von $\mathbb{N}$. Sei ${}^*\mathbb{N}$ so ein Modell. Man kann $\mathbb{N}$ in ${}^*\mathbb{N}$ einbetten durch die Abbildung

$${}^*(-) : \mathbb{N} \to {}^*\mathbb{N} : n \mapsto {}^*n = (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-\text{mal}})^{{}^*\mathbb{N}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung ${}^*(-)$ ein injektiver Homomorphismus ist.

Hinweis: Verwenden Sie hier und in den nächsten Teilaufgaben, dass alles, was wahr ist in $\mathbb{N}$ *und sich in der Logik 1. Stufe ausdrücken lässt*, auch wahr ist in ${}^*\mathbb{N}$ und umgekehrt.

(b) Zeigen Sie, dass alle Elemente, die nicht im Bild von ${}^*(-)$ liegen, größer als jedes ${}^*n$ sein müssen. Wir nennen diese Elemente *unendlich*.

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes unendliche Element x in ${}^*\mathbb{N}$ ein anderes unendliches Element y gibt, so dass $2y \leqslant x$.

Musterlösung.

(a) ${}^*(-)$ ist injektiv, weil

$${}^*m = {}^*n \Longleftrightarrow {}^*\mathbb{N} \models {}^*m = {}^*n \Longleftrightarrow \mathbb{N} \models m = n \Longleftrightarrow m = n.$$

${}^*(-)$ ist ein Homomorphismus, weil es alle Operationen erhält, wie z.B. die $+$:

$${}^*m + {}^*n = {}^*k \Longleftrightarrow {}^*\mathbb{N} \models {}^*m + {}^*n = {}^*k \Longleftrightarrow \mathbb{N} \models m + n = k \Longleftrightarrow m + n = k.$$

(b) $\mathbb{N} \models \forall x \forall y (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$, also ist auch ${}^*\mathbb{N}$ eine lineare Ordnung. Neue Elemente sind deshalb entweder kleiner als 0, liegen zwischen ${}^*n$ und ${}^*(n+1)$ oder sind größer als alle ${}^*n$. Die ersten beiden Fälle sind unmöglich, da die Formeln $\neg\exists x(x \leqslant 0 \wedge \neg x = 0)$ und $\neg\exists x(n \leqslant x \wedge x \leqslant n+1 \wedge \neg x = \wedge \neg x = n+1)$ nicht in $\mathbb{N}$ wahr sind und deshalb auch nicht in ${}^*\mathbb{N}$ wahr sein können.

(c) Die Formel $\forall x \exists y (y + y = x \vee (y + y) + 1 = x)$ ist wahr in $\mathbb{N}$, also muss sie auch wahr sein in ${}^*\mathbb{N}$. Also gibt es für jedes unendliches Element x ein Element y, so dass $y + y = x$ oder $(y + y) + 1 = x$. Dieses Element y muss unendlich sein, da sonst auch $y + y$ und $(y + y) + 1$ endlich wären.

(H3.2)

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \leftrightarrow \neg Py)) \\
\varphi_3 &:= \forall x \exists y (Rxy \wedge (Py \leftrightarrow Ryx))
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie *durch Grundinstanzenresolution*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ nicht erfüllbar ist.

(b) Je zwei der drei Formeln $\varphi, \varphi_2, \varphi_3$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies für alle drei Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

Musterlösung.

(a) Wir wandeln erst φ_3 in Skolemnormalform um:

$$\forall x (Rxf(x) \wedge (Pf(x) \leftrightarrow Rf(x)x)).$$

Wir bekommen die Klauselmenge:

$$\{\neg Rxy, \neg Ryz, Rxz\}, \{\neg Rxy, \neg Px, \neg Py\}, \{\neg Rxy, Py, Px\}, \\ \{Rxf(x)\}, \{\neg Pf(x), Rf(x)x\}, \{Pf(x), \neg Rf(x)x\}.$$

Wir leiten erst $\{\neg Pf(x)\}$ ab.

$$\begin{tikzcd}
\{Rxx, \neg Px\} \arrow[dr] & \{\neg Rxx, Px\} \arrow[d] \\
\{\neg Rxf(x), \neg Rf(x)x, Rxx\} \arrow[dr] & \{\neg Rxx\} \arrow[d] \\
\{Rxf(x)\} \arrow[dr] & \{\neg Rxf(x), \neg Rf(x)x\} \arrow[d] \\
\{Rf(x)x, \neg Pf(x)\} \arrow[dr] & \{\neg Rf(x)x\} \arrow[d] \\
 & \{\neg Pf(x)\}
\end{tikzcd}$$

Also können wir $\{\neg Pf(x)\}$ und $\{\neg Pff(x)\}$ ableiten und damit:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg Rf(x)ff(x), Pf(x), Pff(x)\} \arrow[dr] & \{Rf(x)ff(x)\} \arrow[d] \\
\{\neg Pf(x)\} \arrow[dr] & \{Pf(x), Pff(x)\} \arrow[d] \\
\{\neg Pff(x)\} \arrow[dr] & \{Pff(x)\} \arrow[d] \\
& \square
\end{tikzcd}$$

(b) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an.

- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_2\}$
  Trägermenge: $T = \{c\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \emptyset$ (niemals verbunden).
  $P^{\mathcal{H}} = \emptyset$ (kein Knoten hat die Eigenschaft P).
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_3\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n c \, : \, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \{(f^n, f^m) \, : \, n < m\}$.
  $P^{\mathcal{H}} = \emptyset$ (kein Knoten hat die Eigenschaft P).
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_2, \varphi_3\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n c \, : \, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \{(f^n c, f^{n+1} c) \, : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(f^{n-1}, f^n) \, : \, n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ungerade}\}$.
  $P^{\mathcal{H}} = \{f^n c \, : \, n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ungerade}\}$.

(H3.3)

Beweisen Sie

$$\varphi := \exists x(Px \to \forall y Py)$$

(a) mit Resolution.

(b) im Sequenzenkalkül.

Musterlösung.

(a) $\varphi \equiv \exists x \forall y(Px \to Py)$ und deshalb ist $\forall x \exists y(Px \wedge \neg Py)$ eine Pränexnormalform für $\neg\varphi$. Eine Skolemnormalform ist dann $\forall x(Px \wedge \neg Pfx)$, oder $\{Px\}, \{\neg Pfx\}$ in Klauselform. Resolution:

$$\begin{tikzcd}
\{Pfc\} \arrow[dr] & & \{\neg Pfc\} \arrow[dl] \\
& \square &
\end{tikzcd}$$

(b)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{Ps, Pt \vdash Ps, \forall yPy, \exists x(Px \to \forall yPy)}{Pt \vdash Ps, Ps \to \forall yPy, \exists x(Px \to \forall yPy)}}{Pt \vdash Ps, \exists x(Px \to \forall yPy)}}{Pt \vdash \forall yPy, \exists x(Px \to \forall yPy)}}{\vdash Pt \to \forall yPy, \exists x(Px \to \forall yPy)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall yPy)}$$

(H3.4)

Wir betrachten Sätze von der Gestalt

$$\forall x_0 \ldots \forall x_n \exists y_0 \ldots \exists y_m \varphi(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m),$$

wobei $\varphi(x, y)$ keine Quantoren enthält, keine Funktionssymbole und auch nicht das Gleichheitssymbol $=$.

(a) Zeigen Sie, dass die Frage ob ein bestimmte solcher Satz allgemeingültig ist, entscheidbar ist und skizzieren Sie ein Entscheidungsverfahren.

(b) Ist die Allgemeingültigkeit immer noch entscheidbar, wenn in φ das Gleichheitssymbol vorkommen darf?

(c) Ist die Allgemeingültigkeit immer noch entscheidbar, wenn wir Funktionssymbole in φ zulassen?

Musterlösung.

(a) Die Frage, ob ein Satz von der Gestalt

$$\forall x_0 \ldots \forall x_n \exists y_0 \ldots \exists y_m \varphi(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m)$$

allgemeingültig ist, ist äquivalent zu der Frage ob seine Herbrandnormalform

$$\exists y_0 \ldots \exists y_m \varphi(c_0, \ldots, c_n, y_0, \ldots, y_m)$$

allgemeingültig, wobei $c_0, \ldots, c_n$ neue Konstanten sind. Nach dem Satz von Herbrand ist dieser Satz genau dann allgemeingültig ist, wenn es eine Herbranddiskuntion gibt. Da $\varphi(c_0, \ldots, c_n, y_0, \ldots, y_m)$ nur (endlich viele) Konstanten enthält und keine Funktionssymbole ist die Anzahl von Herbranddisjunktionen endlich. Deshalb kann man sie einfach alle durchrechnen und überprüfen ob es eine Herbranddisjunktion gibt, die eine Tautologie ist.

(b) Ja. Die Sätze die aussagen, dass die Gleichheit eine Kongruenz bildet, sind auch von dieser Gestalt (sie sind sogar rein universell: man braucht keine existentielle Quantoren). Da

$$\begin{gathered}\forall x_0 \ldots \forall x_n \exists y_0 \ldots \exists y_m \varphi \wedge \forall u_0 \ldots \forall u_k \exists v_0 \ldots \exists v_l \psi \quad \equiv \\ \forall x_0 \ldots \forall x_n \forall u_0 \ldots \forall u_k \exists y_0 \ldots \exists y_m \exists v_0 \ldots \exists v_l (\varphi \wedge \psi).\end{gathered}$$

kann man diese Sätze einfach dazu nehmen und die Gleichheit einfach also eine 2-stellige Relation betrachten (wie auch in der Vorlesung diskutiert).

(c) Nein. Wenn man Funktionssymbole zulässt, ist jede Formel in der Logik 1. Stufe gültigkeitsäquivalent zu einer von dieser Gestalt (seine Herbrandnormalform). Die Frage ob eine beliebige Formel in der Logik 1. Stufe allgemeingültig ist, ist aber nicht entscheidbar.