Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24. Juni, 2009

2. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

Abgabe: Mi 1.7. (oder Fr 3.7.), in der Übung

(H2.1)

(a) Weisen Sie *semantisch* die Korrektheit der folgenden Sequenzenregel nach:

$$\frac{\mathit{\Gamma} \vdash (\varphi \to \psi) \to \varphi, \mathit{\Delta}}{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi, \mathit{\Delta}}$$

(b) Leiten Sie die folgende Sequenz in $\mathcal{SK}$ ab:

$$\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$$

Musterlösung.

(a) Angenommen, die Sequenz $\mathit{\Gamma} \vdash (\varphi \to \psi) \to \varphi, \mathit{\Delta}$ ist allgemeingültig. Wir müssen zeigen, dass dann auch die Sequenz $\mathit{\Gamma} \vdash \varphi, \mathit{\Delta}$ allgemeingültig ist.

Sei also $\mathfrak{I} \models \mathit{\Gamma}$ ein Modell der linken Seite. Da $\mathit{\Gamma} \vdash (\varphi \to \psi) \to \varphi, \mathit{\Delta}$ allgemeingültig ist, gibt es eine Formel $\delta \in \mathit{\Delta} \cup \{(\varphi \to \psi) \to \varphi\}$ mit $\mathfrak{I} \models \delta$. Wenn $\delta \in \mathit{\Delta}$ ist, dann sind wir fertig. Andernfalls gilt $\mathfrak{I} \models (\varphi \to \psi) \to \varphi$. Wir behaupten, dass dann $\mathfrak{I} \models \varphi$ gilt. Wenn das nicht so wäre, dann folgt einerseits $\mathfrak{I} \models \varphi \to \psi$, da $\mathfrak{I}(\varphi) = 0$, aber andererseits auch $\mathfrak{I} \not\models \varphi \to \psi$, da $\mathfrak{I} \models (\varphi \to \psi) \to \varphi$ und $\mathfrak{I}(\varphi) = 0$. Also $\mathfrak{I} \models \varphi$ und der Beweis ist fertig.

(b) Wir verwenden hier, dass man für jede Formel φ die Sequenz $\mathit{\Gamma}, \varphi \vdash \mathit{\Delta}, \varphi$ ableiten kann (das war Aufgabe E3.2).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \psi, \varphi}{\vdash \varphi \to \psi, \varphi} \qquad \varphi \vdash \varphi}{(\varphi \to \psi) \to \varphi \vdash \varphi}}{\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi}$$

(H2.2)

Wir wollen Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ mit Hilfe der Prädikatenlogik definieren. Wie im Skript, S. 3, definieren wir zu einem nichtleeren Wort $z = c_1 \dots c_n$ eine *Wortstruktur*

$$\mathcal{W}(z) = (\{1, \dots, n\}, <, P_a, P_b)$$

wobei $$P_a := \{\, i \leqslant n \mid c_i = a \,\} \quad \text{und} \quad P_b := \{\, i \leqslant n \mid c_i = b \,\}\,.$$

(Wir schließen das leere Wort aus, da es keine leeren Strukturen gibt.) Ein Satz φ definiert dann die Sprache $L(\varphi) := \{\, z \in \Sigma^+ \mid \mathcal{W}(z) \models \varphi \,\}$.

(a) Welche Sprachen definieren die folgenden Formeln?

 (i) $\forall x \forall y[x < y \to ((P_a x \to P_a y) \wedge (P_b y \to P_b x))]$

 (ii) $\forall x \forall y[(x < y \wedge P_a x \wedge P_a y) \to \exists z(x < z \wedge z < y \wedge P_b z)]$

(b) Geben Sie zu den folgenden Sprachen Formeln an, welche sie definieren.

 (i) $L((a + b)^* bb(a + b)^*)$

 (ii) $L((ab)^+)$

(c) Wir definieren die Menge der $*$-*freien regulären Ausdrücke* induktiv durch

 - $\emptyset$ und jedes Element von Σ sind $*$-freie reguläre Ausdrücke;
 - sind α und β $*$-freie reguläre Ausdrücke, so auch $\alpha\beta$, $\alpha + \beta$ und $\sim\alpha$.

 Die Semantik eines solchen Ausdrucks ist wie für reguläre Ausdrücke definiert, wobei die Operation $\sim$ für die Komplementierung steht: $L(\sim\alpha) := \Sigma^* \setminus L(\alpha)$. Konstruieren Sie (induktiv) zu einem gegebenen $*$-freien regulären Ausdruck α eine Formel $\varphi_\alpha(x, y)$, so daß

$$\mathcal{W}(c_1 \dots c_n) \models \varphi_\alpha[i, k] \quad \text{gdw} \quad 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n \text{ und } c_i \dots c_k \in L(\alpha)\,.$$

Musterlösung.

(a) $b^*(a + b)a^*$ und $(b + ab)^*(a + b)b^*$.

(b)
$$\exists x \exists y[x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y) \wedge P_b x \wedge P_b y]$$

und
$$\forall x \forall y[(x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)) \to (P_a x \leftrightarrow P_b y)] \wedge$$
$$\forall x(\neg\exists y(y < x) \to P_a x) \wedge \forall x(\neg\exists y(x < y) \to P_b x)$$

(c) Für $\alpha = \emptyset$, $\varphi_\alpha(x, y) := \exists z(\neg z = z)$. Für $\alpha = l \in \Sigma$, $\varphi_l(x, y) := x = y \wedge P_l x$. Für andere $*$-freien regulären Ausdrücke α wird $\varphi_\alpha(x, y)$ induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha\beta}(x, y) &:= \exists z[x \leqslant z \wedge z \leqslant y \wedge \varphi_\alpha(x, z) \wedge \varphi_\beta(z, y)] \\
\varphi_{\alpha+\beta}(x, y) &:= \varphi_\alpha(x, y) \vee \varphi_\beta(x, y) \\
\varphi_{\sim\alpha}(x, y) &:= x \leqslant y \wedge \neg\varphi_\alpha(x, y)
\end{aligned}$$

($x \leqslant y$ ist eine Abkürzung für $x < y \vee x = y$.)

(H2.3)

Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln:

(a) $\forall x(Px \lor \exists x \neg Px)$

(b) $\exists x(\forall y Ryy \to \forall y(Rxy \to \exists z(Rxz \land Rzy)))$

(c) $\forall x \exists y Pxy \to \forall x \exists y Rxy$

(d) $\forall y(Py \lor \forall x(\forall z(Rxz \to Pz) \to \exists u(Ruy)))$

Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.

Musterlösung.

Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:

(a) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \forall x(Px \lor \exists x \neg Px) &\equiv \forall x(Px \lor \exists y \neg Py) \\ &\equiv \forall x \exists y(Px \lor \neg Py) \end{aligned}$$

Skolemnormalform: $\forall x(Px \lor \neg Py(x))$.

(b) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \exists x(\forall y Ryy \to \forall y(Rxy \to \exists z(Rxz \land Rzy))) &\equiv \exists x(\forall y Ryy \to \forall t(Rxt \to \exists z(Rxz \land Rzt))) \\ &\equiv \exists x \exists y \forall t \exists z(Ryy \to (Rxt \to (Rxz \land Rzt))) \end{aligned}$$

Skolemnormalform: $\forall t\,(Rdd \to (Rct \to (Rcz(t) \land Rz(t)t)))$.

(c) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y Pxy \to \forall x \exists y Rxy &\equiv \forall x \exists y Pxy \to \forall z \exists t Rzt \\ &\equiv \exists x \forall z \exists t \forall y(Pxy \to Rzt) \end{aligned}$$

Skolemnormalform: $\forall z \forall y(Pcy \to Rzt(z))$.

(d) Pränexe Normalform:

$$\forall y(Py \lor \forall x(\forall z(Rxz \to Pz) \to \exists u(Ruy))) \equiv \forall y \forall x \exists z \exists u(Py \lor ((Rxz \to Pz) \to Ruy))$$

Skolemnormalform: $\forall x \forall y(Py \lor ((Rxz(x,y) \to Pz(x,y)) \to Ru(x,y)y))$.

(H2.4)

Seien

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \exists x \forall y(Rxy \to Py) \\ \varphi_2 &:= \forall x \forall y \forall z((Rxy \land Ryz) \to Rxz) \\ \varphi_3 &:= \forall x(Px \to \exists y(Rxy \land \neg Py)) \\ \varphi_4 &:= \forall x \exists y Rxy \end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies für alle vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

Musterlösung.

(a) φ_2 ist schon in Skolem-Normalform, für φ_1 führen wir eine Konstante c ein und für φ_3 und φ_4 einstellige Funktionssymbole f und g.

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 & \rightsquigarrow & \forall y(Rcy \to Py) \\ \varphi_2 & \rightsquigarrow & \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \\ \varphi_3 & \rightsquigarrow & \forall x(Px \to (Rxfx \wedge \neg Pfx)) \\ \varphi_4 & \rightsquigarrow & \forall x Rxgx \end{array}$$

(b) Es genügt zu zeigen, dass die Skolem-Normalformen von φ_1 bis φ_4 nicht gleichzeitig erfüllbar sind.

Nehmen wir an, dass $\mathcal{A}$ ein Modell wäre. Es ist hilfreich $\mathcal{A}$ als einen Graph zu betrachten, wobei $R^{\mathcal{A}}$ die Kantenrelation ist und $P^{\mathcal{A}}$ eine Eigenschaft der Knoten. φ_4 besagt dann, dass der Knoten $c^{\mathcal{A}}$ mit $gc^{\mathcal{A}}$ verbunden ist. Aus φ_1 folgt, dass $gc^{\mathcal{A}}$ die Eigenschaft $P^{\mathcal{A}}$ hat. Weil $\mathcal{A}$ auch ein Modell von φ_3 ist, muss der Knoten $gc^{\mathcal{A}}$ verbunden sein mit dem Knoten $fgc^{\mathcal{A}}$, der die Eigenschaft $P^{\mathcal{A}}$ nicht besitzt. Da die Kantenrelation transitiv ist (wegen φ_2) ist auch c mit $fgc^{\mathcal{A}}$ verbunden. Aber jetzt folgt aus φ_1, dass $fgc^{\mathcal{A}}$ die Eigenschaft $P^{\mathcal{A}}$ hat. Widerspruch! Wir schliessen, dass es keine Modelle von $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ gibt.

(c) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an.

- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n c : n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \emptyset$ (niemals verbunden).
  $P^{\mathcal{H}} = \emptyset$ (kein Knoten hat die Eigenschaft P).
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \{g^n c : n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = T \times T$ (immer verbunden).
  $P^{\mathcal{H}} = T$ (alle Knoten haben die Eigenschaft P).
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \cup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{n+1} = \{ft : t \in T_n\} \cup \{gt : t \in T_n\}$ (also ein binärer Baum).
  $R^{\mathcal{H}} = \{(s,t) \in T^2 : s \in T_n \text{ und } t \in T_{n+1} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$.
  $P^{\mathcal{H}} = \cup\{T_n : n \text{ ungerade}\}$.
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$
  Trägermenge: wie oben.
  $R^{\mathcal{H}} = T \times T$ (immer verbunden).
  $P^{\mathcal{H}} = \emptyset$ (Knoten haben niemals die Eigenschaft P).