Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Juni, 2009

1. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

Abgabe: Mi 17.6. (oder Fr 19.6.), in der Übung

(H1.1)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph (ohne Schleifen). Wir nennen G 3-*färbbar,* wenn es eine Abbildung $f : V \to \{1, 2, 3\}$ gibt, so dass für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

(a) Erstellen Sie eine Formelmenge $\Phi(G)$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn G 3-färbbar ist.

Hinweis. Führen Sie zu jedem Knoten $v \in V$ von G drei Variablen p_1^v, p_2^v, p_3^v für die drei Farben ein.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass ein Graph G genau dann 3-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph 3-färbbar ist. ($H = (V_0, E_0)$ ist ein Teilgraph von G, wenn $V_0 \subseteq V$ und $E_0 \subseteq E$ ist.)

Musterlösung.

(a) $\Phi(G) = \{\, p_1^v \vee p_2^v \vee p_3^v \;:\; v \in V \,\} \cup \{\, \neg(p_1^v \wedge p_2^v) \wedge \neg(p_2^v \wedge p_3^v) \wedge \neg(p_1^v \wedge p_3^v) \;:\; v \in V \} \cup \{\, \neg(p_i^u \wedge p_i^v) \;:\; i \in \{1, 2, 3\}, (u, v) \in E \,\}$.

(b) Betrachte die folgenden Aussagen:

(i) G is 3-färbbar.
(ii) $\Phi(G)$ ist erfüllbar.
(iii) Jede Teilmenge von $\Phi(G)$ ist erfüllbar.
(iv) Jeder Teilgraph von G ist 3-färbbar.

Wir haben $\Phi(G)$ so gewählt, dass die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii) gilt und die Äquivalenz (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) folgt aus dem Kompaktheitssatz. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (iv) gilt offensichtlich (eine 3-Färbung des gesamten Graphes bestimmt eine 3-Färbung jedes Teilgraphes), also haben wir nur noch zu beweisen, dass (iv) $\Rightarrow$ (iii).

Nehmen wir an, jeder endliche Teilgraph von G ist 3-färbbar. Zu beweisen ist, dass jede endliche Teilmenge von $\Phi(G)$ erfüllbar ist. Sei Γ also eine endliche Teilmenge von $\Phi(G)$ und W die (endliche) Menge der Knoten $v \in V$ für die eine Variable p_i^v in Γ vorkommt. Der endliche Teilgraph $(W, E \upharpoonright W \times W)$ ist 3-färbbar. Also gibt es eine Abbildung $f : W \to \{1, 2, 3\}$, so dass für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$. Dann wird die endliche Formelmenge Γ von der Belegung $\mathfrak{J}(p_i^w) = 1$ gdw. $f(w) = i$ erfüllt.

(H1.2)

Eine Formelmenge Δ heißt ein Axiomensystem für eine Formelmenge Γ, falls Γ und Δ dieselbe Modelle haben. Γ heißt endlich axiomatisierbar, falls es ein endliches Axiomensystem für Γ gibt.

Sei $\Gamma = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, wobei für $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt: $\models \varphi_{i+1} \to \varphi_i$ und $\not\models \varphi_i \to \varphi_{i+1}$. Zeigen Sie, dass Γ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Musterlösung.

Nehmen wir an, Γ sei endlich axiomatisierbar. Dann gibt es eine endliche Formelmenge $\Delta = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$, so dass Δ und Γ dieselben Modelle haben. Sei $\psi = \psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \ldots \psi_n$. Dann haben ψ und Γ dieselben Modelle und insbesondere gilt $\models \psi \to \varphi_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Wenn ψ und Γ dieselben Modelle haben, dann ist $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ nicht erfüllbar. Nach dem Kompaktheitssatz gibt es also eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, so dass $\Gamma_0 \cup \{\neg\psi\}$ schon unerfüllbar ist. Sei $n = \max\{i \in \mathbb{N} : \varphi_i \in \Gamma_0\}$. Weil $\models \varphi_{i+1} \to \varphi_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, gilt $\models \varphi_i \to \varphi_k$ falls $i \geqslant k$, und deshalb $\varphi_n \models \gamma$ für jedes $\gamma \in \Gamma_0$. Andererseits ist $\varphi_n \in \Gamma_0$, also haben φ_n und Γ_0 dieselben Modelle.

Daraus folgt, dass $\{\varphi_n, \neg\psi\}$ schon unerfüllbar ist, also $\models \varphi_n \to \psi$. Da auch $\models \psi \to \varphi_n$, sind φ_n und ψ äquivalent. Andererseits gilt $\models \psi \to \varphi_{n+1}$, aber nicht $\models \varphi_n \to \varphi_{n+1}$. Widerspruch!

(H1.3)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee s).$$

(b) Seien

$$\begin{aligned} \varphi &:= (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r), \\ \psi &:= (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r). \end{aligned}$$

Weisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode nach, dass $\varphi \models \psi$.

Musterlösung.

(a) Klauselmenge: $\big\{\{p, \neg r\}, \{\neg q, s\}, \{q, r\}, \{\neg p, \neg s\}, \{\neg q, r, \neg s\}, \{\neg p, q, s\}\big\}$.

$$\begin{tikzcd}
\{q,r\} \arrow[d] & & \{\neg q, r, \neg s\} \arrow[dll] & & \{\neg q, s\} \arrow[d] & & \{\neg p, q, s\} \arrow[dll] \\
\{r, \neg s\} \arrow[drr] & & \{\neg q, s\} \arrow[d] & & \{\neg p, s\} \arrow[d] & & \{\neg p, \neg s\} \arrow[dll] \\
\{q, r\} \arrow[drr] & & \{r, \neg q\} \arrow[d] & & \{\neg p\} \arrow[d] & & \{p, \neg r\} \arrow[dll] \\
& & \{r\} \arrow[dr] & & \{\neg r\} \arrow[dl] & & \\
& & & \square & & &
\end{tikzcd}$$

(b) Klauselmenge: $\big\{\{p,q,r\},\{\neg p,q,r\},\{\neg p,\neg q\},\{p,\neg q,\neg r\},\{p,q,\neg r\},\{\neg p,q,\neg r\},\{\neg q,r\}\big\}$.

$$
\begin{tikzcd}
\{p,q,r\} \arrow[d] & \{\neg p,q,r\} \arrow[dl] & \{\neg p,\neg q\} \arrow[dr] & \{p,\neg q,\neg r\} \arrow[d] & \{p,q,\neg r\} \arrow[d] & \{\neg p,q,\neg r\} \arrow[dl] \\
\{q,r\} \arrow[dr] & \{\neg q,r\} \arrow[d] & & \{\neg q,\neg r\} \arrow[d] & \{q,\neg r\} \arrow[dl] & \\
 & \{r\} \arrow[dr] & & \{\neg r\} \arrow[dl] & & \\
 & & \Box & & &
\end{tikzcd}
$$

(H1.4)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus aus der Vorlesung die minimale Belegung der folgenden Menge von Hornklauseln.

$$
\{\neg q,\neg r,t\},\{\neg s,q\},\{\neg s,\neg t,\neg u,p\},\{\neg r,\neg s,q\},\{\neg r,\neg u,v\},\{s\},\\
\{\neg p,\neg u,\neg v,r\},\{\neg s,r\},\{\neg r,\neg s,\neg t,\neg u,v\}.
$$

Musterlösung.

Schritt 1: $\{s\}$

$$
\{\neg q,\neg r,t\},\{q\},\{\neg t,\neg u,p\},\{\neg r,q\},\{\neg r,\neg u,v\},\\
\{\neg p,\neg u,\neg v,r\},\{r\},\{\neg r,\neg t,\neg u,v\}.
$$

Schritt 2: $\{q\}$

$$
\{\neg r,t\},\{\neg t,\neg u,p\},\{\neg r,\neg u,v\},\\
\{\neg p,\neg u,\neg v,r\},\{r\},\{\neg r,\neg t,\neg u,v\}.
$$

Schritt 3: $\{r\}$

$$
\{t\},\{\neg t,\neg u,p\},\{\neg u,v\},\{\neg t,\neg u,v\}.
$$

Schritt 4: $\{t\}$

$$
\{\neg u,p\},\{\neg u,v\}.
$$

Die minimale Belegung $\mathfrak{J}$ ist also

$$
\mathfrak{J}(v) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in \{q,r,s,t\} \\ 0 & \text{falls } v \in \{p,u,v\}. \end{cases}
$$