Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Juli, 2009

6. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E6.1)

Seien P, Q und S einstellige Relationssymbole, R ein zweistelliges Relationssymbol und Φ die Formelmenge:

(1) $\forall x \forall y\, ((Q(x) \wedge R(x, y)) \to S(y))$.

(2) $\forall x \forall y\, ((S(x) \wedge R(x, y)) \to \neg Q(y))$.

(3) $\forall x \exists y\, (R(x, y) \wedge Q(y))$.

(a) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

(b) Begründen Sie intuitiv, warum diese Formelmenge nicht erfüllbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie R als die Kantenrelation eines Graphen und P, Q und S als Farben, wobei $P(x)$ bedeutet, dass der Knoten x die Farbe P hat.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.

Musterlösung.

(a) Die erste beide Formeln sind schon in Skolemnormalform. Eine Skolemnormalform für die letzte Formel ist:

(3') $\forall x (R(x, f(x)) \wedge Q(f(x)))$.

(b) Sei x ein Element eines Modells. Die Formel (3') sagt, dass es immer eine Kante von einem Knoten $f^n x$ nach $f^{n+1}x$ gibt und dass alle Knoten von der Gestalt $f^{n+1}x$ die Farbe Q haben. (1) impliziert dann, dass Knoten von der Gestalt $f^{n+2}x$ die Farbe S haben und (2), dass Knoten von der Gestalt $f^{n+3}x$ die Farbe Q nicht haben. Also hat f^3x sowohl die Farbe Q als auch nicht die Farbe Q. Widerspruch! Also kann es kein Modell geben und ist die Formelmenge (1-3) unerfüllbar.

(c) Wir schreiben erst die Aussagen in Klauselform um:

$$\{\neg Q(x), \neg R(x, y), S(y)\}$$
$$\{\neg S(x), \neg R(x, y), \neg Q(y)\}$$
$$\{R(x, f(x))\}, \{Q(f(x))\}$$

Mit Grundinstanzen-Resolution leitet man dann ab:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{\underline{Rfcffc}\} \arrow[dr] & & \{\neg Qfc, \underline{\neg Rfcffc}, Sffc\} \arrow[dl] \\
\{\underline{Qfc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Qfc}, Sffc\} \arrow[dl] & \\
 & \{\underline{Sffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Sffc}, \neg Rffcfffc, \neg Qfffc\} \arrow[dl] \\
\{\underline{Rffcfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Rffcfffc}, \neg Qfffc\} \arrow[dl] & \\
 & \{\underline{\neg Qfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{Qfffc}\} \arrow[dl] \\
 & & \Box &
\end{tikzcd}$$

(E6.2)

Seien R und E zweistellige Relationssymbole und Φ die Formelmenge:

(1) $\forall x Exx$,
(2) $\forall x \forall y (Exy \to Eyx)$,
(3) $\forall x \forall y \forall z (Exy \wedge Eyz \to Exz)$,
(4) $\forall x \forall y (\neg Exy \to \exists z (\neg Exz \wedge \neg Eyz \wedge Rxz \wedge \neg Ryz))$,
(5) $\forall x \forall y (Rxy \to Ryx)$,
(6) $\forall x \forall y (Exy \to \neg Rxy)$,
(7) $\forall x \exists y Rxy$,
(8) $\exists x \forall y (\neg Exy \to Rxy)$.

(a) (1)–(3) besagen, dass E eine Äquivalenzrelation ist. Was ist die anschauliche Bedeutung der Formeln (4)–(8), wenn man E als (Modellierung der) Gleichheit betrachtet? Können Sie ein kleinstmögliches Modell von (1)–(7) angeben?

(b) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

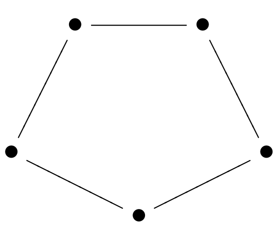
(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.

Musterlösung.

(a) (4)–(7) besagen, dass R die Kantenrelation eines ungerichteten Graphen ist, so dass jeder Knoten einen Nachbarn hat und es zu je zwei verschiedenen Elementen x und y ein z gibt, welches verschieden von x und y und mit x aber nicht mit y verbunden ist.

(8) sagt aus, dass mindestens ein Knoten mit allen anderen verbunden ist.

Kleinstes Modell:



(b)

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \forall x Exx\,, \\
(2) & \forall x \forall y (Exy \to Eyx)\,, \\
(3) & \forall x \forall y \forall z ((Exy \wedge Eyz) \to Exz)\,, \\
(4) & \forall x \forall y (\neg Exy \to (\neg Exfxy \wedge \neg Eyfxy \wedge Rxfxy \wedge \neg Ryfxy))\,, \\
(5) & \forall x \forall y (Rxy \to Ryx)\,, \\
(6) & \forall x \forall y (Exy \to \neg Rxy)\,, \\
(7) & \forall x Rxgx\,, \\
(8) & \forall y (\neg Ecy \to Rcy)\,.
\end{array}
$$

(c) Klauseln:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \{Ett\}\,, \\
(2) & \{\neg Et_0t_1, Et_1t_0\}\,, \\
(3) & \{\neg Et_0t_1, \neg Et_1t_2, Et_0t_2\}\,, \\
(4) & \{Et_0t_1, \neg Et_0ft_0t_1\}, \{Et_0t_1, \neg Et_1ft_0t_1\}, \{Et_0t_1, Rt_0ft_0t_1\}, \{Et_0t_1, \neg Rt_1ft_0t_1\}\,, \\
(5) & \{\neg Rt_0t_1, Rt_1t_0\}\,, \\
(6) & \{\neg Et_0t_1, \neg Rt_0t_1\}\,, \\
(7) & \{Rtgt\}\,, \\
(8) & \{Ect, Rct\}\,.
\end{array}
$$

Erst leiten wir $\{\neg Egcc\}$ ab:

$$
\begin{tikzcd}
\{Rcgc\} \arrow[d] & \{\neg Ecgc, \neg Rcgc\} \arrow[dl] \\
\{\neg Ecgc\} \arrow[d] & \{\neg Egcc, Ecgc\} \arrow[dl] \\
\{\neg Egcc\} &
\end{tikzcd}
$$

Und damit dann auch die leere Klausel:

$$
\begin{tikzcd}
\{\neg Egcc\} \arrow[dr] & \{Egcc, \neg Ecfgcc\} \arrow[d] & & \\
\{Ecfgcc, Rcfgcc\} \arrow[dr] & \{\neg Ecfgcc\} \arrow[d] & \{\neg Egcc\} \arrow[d] & \{Egcc, \neg Rcfgcc\} \arrow[dl] \\
& \{Rcfgcc\} \arrow[dr] & \{\neg Rcfgcc\} \arrow[d] & \\
& & \Box &
\end{tikzcd}
$$

(E6.3)

Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

(i) $\forall x R(x, f(x)) \vdash \exists x R(f(x), f(f((x))))$.

(ii) $\forall x f(x,x) = x \vdash \forall x(P(x) \vee \neg P(f(x,x)))$.

(iii) $\exists y \forall x R(x,y) \vdash \forall x \exists y R(x,y)$.

(iv) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, vorausgesetzt, dass $x \notin \text{frei}(\psi)$.

Musterlösung.

(i)

$$\begin{array}{c}
\forall x Rxfx, Rfcffc \vdash Rfcffc, \exists x Rfxffx \\ \hline
\forall x Rxfx \vdash Rfcffc, \exists x Rfxffx \\ \hline
\forall x Rxfx \vdash \exists x Rfxffx
\end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{c}
\hline
\forall x fxx = x, fcc = c, Pc, Pfcc \vdash Pc \\ \hline
\forall x fxx = x, fcc = c, Pfcc \vdash Pc \\ \hline
\forall x fxx = x, Pfcc \vdash Pc \\ \hline
\forall x fxx = x \vdash Pc, \neg Pfcc \\ \hline
\forall x fxx = x \vdash Pc \vee \neg Pfcc \\ \hline
\forall x fxx = x \vdash \forall x(Px \vee \neg Pfxx)
\end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{c}
\forall x Rxb, Rab \vdash Rab, \exists y Ray \\ \hline
\forall x Rxb \vdash Rab, \exists y Ray \\ \hline
\forall x Rxb \vdash \exists y Ray \\ \hline
\exists y \forall x Rxy \vdash \exists y Ray \\ \hline
\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy
\end{array}$$

(iv) Beachte, dass $\psi(c/x) = \psi$ ist, da $x \notin \text{frei}(\psi)$.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \hline \forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vdash \varphi(c/x), \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \hline \forall x(\varphi \vee \psi), \psi \vdash \varphi(c/x), \psi \end{array} \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vee \psi \vdash \varphi(c/x), \psi \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi(c/x), \psi \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \psi \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \forall x \psi \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi
\end{array}$$

(E6.4)

Beweisen Sie die gegebene Folgerungsbeziehung sowohl im Sequenzenkalkül als auch durch Resolution.

$$\forall x \neg P(x), \neg \exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$$

Musterlösung.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \neg Px, \neg Pz \vdash \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx), \neg Pz, Qz, \exists x Qx} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\forall x \neg Px, \neg Pz, Qz \vdash \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx), Qz, \exists x Qx}}{\forall x \neg Px, \neg Pz \vdash \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx), \neg Qz, Qz, \exists x Qx}}{\forall x \neg Px, \neg Pz \vdash \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx), \neg Pz \wedge \neg Qz, Qz, \exists x Qx}}{\forall x \neg Px, \neg Pz \vdash \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx), Qz, \exists x Qx}}{\forall x \neg Px, \neg Pz, \neg \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash Qz, \exists x Qx}}{\forall x \neg Px, \neg \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash Qz, \exists x Qx}}{\forall x \neg Px, \neg \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash \exists x Qx}$$

Die Sequenz ist genau dann allgemeingültig, wenn

$$\forall x \neg Px, \neg \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx), \neg \exists x Qx$$

nicht erfüllbar ist.

Deshalb haben wir die folgende Klauselmenge:

$$\{\neg Px\}, \{Px, Qx\}, \{\neg Qx\}.$$

Resolutionsbeweis:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg Px\} \arrow[dr] & \{Px, Qx\} \arrow[d] & \\
 & \{Qx\} \arrow[dr] & \{\neg Qx\} \arrow[d] \\
 & & \square
\end{tikzcd}$$