Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Juli, 2009

5. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E5.1)

Zeigen Sie, dass wenn T_1 und T_2 zwei Theorien sind, so dass $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, es ein Satz σ gibt, so dass $T_1 \models \sigma$ und $T_2 \models \neg\sigma$.

Musterlösung.

Wenn $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, gibt es, nach dem Kompaktheitssatz, schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq T_1 \cup T_2$ die keine Modelle hat. Sei $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \in T_1\}$, $\Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \in T_2\}$ und $\sigma = \bigwedge \Gamma_1$. Klar ist, dass $T_1 \models \sigma$, also haben wir nur noch zu beweisen, dass $T_2 \models \neg\sigma$.

Nehmen wir an, dass $T_2 \not\models \neg\sigma$, also dass es ein Modell M gibt, so dass $M \models T_2$ und $M \models \sigma$. Dann $M \models \Gamma_2$, weil $\Gamma_2 \subseteq T_2$ und $M \models T_2$, und $M \models \Gamma_1$, weil $M \models \sigma$ und $\sigma = \bigwedge \Gamma_1$. Das widerspricht, dass $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ keine Modelle hat. Also $T_2 \models \neg\sigma$.

(E5.2)

Zeigen Sie, dass eine Theorie T, die beliebig grosse endliche Modelle hat, auch ein unendliches Modell besitzt.

Geben Sie auch einen Satz an, der endliche und unendliche Modelle hat, aber keine beliebig grossen Modelle.

Musterlösung.

Wir haben gesehen, dass es eine Formel φ_n gibt, die genau dann wahr ist in einem Modell, wenn das Modell mehr als n Elemente hat, nämlich

$$\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i = x_j.$$

Betrachte $T_\infty = T \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Da die Modelle von T_∞ genau die Modelle von T sind, die unendlich viele Elemente haben, müssen wir zeigen, dass T_∞ erfüllbar ist.

Wir beweisen, dass T_∞ erfüllbar ist, indem wir zeigen, dass jede endliche Teilmenge von T_∞ ein Modell hat. Sei Γ also eine endliche Teilmenge von T_∞. Da Γ nur endliche viele φ_n enthalten kann, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\Gamma \subseteq T \cup \{\varphi_n : n \leqslant k\}.$$

Da T beliebig grosse endliche Modelle hat, gibt es ein Modell M von T mit mehr als k Elementen. Also $M \models \varphi_n$ für alle $n \leqslant k$, und deshalb $M \models \Gamma$.

Wir haben gesehen, dass es ein Satz ψ gibt die nur unendliche Modelle hat, und ein Satz φ, die nur dann wahr ist, wenn die Trägermenge höchstens fünf Elemente hat. Dann hat der Satz

$$\psi \vee \varphi$$

endliche und unendliche Modelle, aber keine beliebig grossen Modelle.

(E5.3)

Ein Pfad in einem Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Sequenz $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ von Knoten, so dass

$$x_i E x_{i+1}$$

für alle $i < n$. Der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle Paaren von Knoten (x, y) einen Pfad $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ gibt, mit $x = x_0$ und $y = x_n$.

Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge Γ in der Sprache der Graphen gibt, so dass $\mathcal{G} \models \Gamma$ genau dann wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist.

Musterlösung.

Wir verwenden, dass man eine Formel $\varphi_n(x, y)$ definieren kann, die aussagt, dass es einen Pfad der Länge n vom Startzustand nach y gibt:

$$\varphi_n(y) = \exists x_0 \ldots \exists x_n \,(\, x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \bigwedge_{i<n} x_i E x_{i+1} \,).$$

Nehmen wir an, dass es eine Formelmenge Γ gibt in der Sprache der Graphen, so dass ein Graph $\mathcal{G}$ ein Modell von Γ ist, genau dann wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist. Wir erweiteren die Signatur mit zwei Konstanten c und d und betrachten die folgende Formelmenge in der erweiterten Sprache:

$$\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\neg\varphi_n(c, d) \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Formelmenge Γ_∞ is unerfüllbar, da man in einem Modell $\mathcal{G}$ die Konstanten c und d nicht widerspruchsfrei interpreteren kann: einerseits soll der Zustand $d^{\mathcal{G}}$ von $c^{\mathcal{G}}$ aus erreichbar sein, da Γ erfüllt ist und der Graph $\mathcal{G}$ deshalb zusammenhängend sein muss; andererseits kann $d^{\mathcal{G}}$ nicht von $c^{\mathcal{G}}$ aus erreichbar sein: dann würde es einen Pfad von $c^{\mathcal{G}}$ nach $d^{\mathcal{G}}$ geben; dieser Pfad hat eine bestimmte Länge n, was unmöglich ist, da $\mathcal{G} \models \neg\varphi_n(c, d)$.

Also ist schon eine endliche Teilmenge von Γ_∞ unerfüllbar und insbesondere ist schon eine Teilmenge von der Form

$$\Gamma_n = \Gamma \cup \{\varphi_k(c, d) \,:\, k < n\}$$

unerfüllbar (da jede endliche Teilmenge in einer Γ_n enthalten ist). Aber jedes Γ_n hat ein Modell, wobei es einen Pfad von $c^{\mathcal{G}}$ nach $d^{\mathcal{G}}$ gibt, aber keinen mit einer Länge kürzer als n. (Ein Modell könnte so aussehen:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n\,,$$

wobei wir c als der 0-Knoten und d als der n-Knoten interpretieren.)

Also haben wir einen Widerspruch und schliessen, dass es keine Formel Γ geben kann, die die Zusammenhang eines Graphen ausdrückt.

(E5.4)

Betrachten Sie die folgende Theorie $\mathcal{T}$:

(i) Die Sprache $L(\mathcal{T})$ von $\mathcal{T}$ hat Konstanten 0 und 1, ein zweistelliges Funktionssymbol $+$, ein einstelliges Funktionssymbol $2^{(-)}$ und ein einstelliges Predikatsymbol I (Intuition: $I(x)$ bedeutet "x ist eine (erreichbare) natürliche Zahl").

(ii) Die nicht-logischen Axiome von $\mathcal{T}$ sind:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, y + 0 = y,$$
$$2^0 = 1, 2^x + 2^x = 2^{1+x},$$
$$I(0), I(x) \to I(1 + x).$$

(a) Sei 2_k induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} 2_0 &= 0, \\ 2_{k+1} &= 2^{2_k}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{T}$ mit einem Beweis einer in k linearen Tiefe beweist, dass

$$\mathcal{T} \vdash I(2_k).$$

Hinweis: definieren Sie induktiv Prädikate R_i:

$$\begin{aligned} R_0 &:= I, \\ R_{i+1} &:= \forall y(R_i(y) \to R_i(2^x + y)), \end{aligned}$$

und beweisen Sie mit Induktion über i, dass

$$\mathcal{T} \vdash R_i(0) \wedge \forall x(R_i(x) \to R_i(1 + x)).$$

(b) Sei $\forall x_0 \ldots \forall x_n \varphi(x_0, \ldots, x_n)$ der universelle Abschluss der Axiome von $\mathcal{T}$. In Aufgabe (a) haben Sie bewiesen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \vdash I(2_k) &\Leftrightarrow \vdash \forall x_0 \ldots \forall x_n \varphi(x_0, \ldots, x_n) \to I(2_k) \\ &\Leftrightarrow \vdash \exists x_0 \ldots \exists x_n(\varphi(x_0, \ldots, x_n) \to I(2_k)). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass wir für jede gültige Herbranddisjunktion von $\exists x_0 \ldots \exists x_n(\varphi(x_0, \ldots, x_n) \to I(2_k))$ mindestens 2_k Terme brauchen.

Musterlösung.

(a) Die Aussage ist klar für $i = 0$.

Nehmen wir an, die Aussage stimmt für i. Da $2^0 = 1$, bekommen wir

$$\begin{aligned} R_{i+1}(0) &\equiv \forall y(R_i(y) \to R_i(2^0 + y)) \\ &\equiv \forall y(R_i(y) \to R_i(1 + y)), \end{aligned}$$

also $\mathcal{T} \vdash R_{i+1}(0)$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
R_{i+1}(x) &\equiv \forall y(R_i(y) \to R_i(2^x + y)) \\
&\equiv \forall y((R_i(y) \to R_i(2^x + y)) \wedge (R_i(2^x + y) \to R_i(2^x + (2^x + y)))) \\
&\to \forall y(R_i(y) \to R_i((2^x + 2^x) + y)) \\
&\equiv \forall y(R_i(y) \to R_i(2^{1+x} + y)) \equiv R_{i+1}(1 + x).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $R_{i+1}(x) \to (R_i(0) \to R_i(2^x + 0))$ (wir setzen $y := 0$) und deshalb $R_{i+1}(x) \to R_i(2^x)$ und $R_{i+1}(2_k) \to R_i(2_{k+1})$. Durch k-malige Anwendung dieser Implikation bekommen wir

$$\begin{aligned}
R_k(0) &\to R_{k-1}(2_1) \\
&\dots \\
&\to R_0(2_k) \equiv I(2_k).
\end{aligned}$$

(b) In einer Herbranddisjunktion brauchen wir alle Instanzen

$$I(n) \to I(1 + n)$$

für $n < 2_k$. Würde nämlich $I(n) \to I(1+n)$ fehlen für ein bestimmtes $n < 2_k$, dann könnten wir I als die Menge der Zahlen m mit $m \leqslant n$ interpretieren und dann würde $I(2_k)$ falsch sein.