Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24. Juni, 2009

4. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E4.1)

(a) Zeigen Sie, dass man zu jeder Formel φ eine Formel φ^* in Negationsnormalform konstruieren kann, so dass $\varphi \equiv \varphi^*$.

(b) Sei φ eine Formel, worin x nicht vorkommt. Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi \to \exists x \psi(x) & \equiv & \exists x(\varphi \to \psi(x)) \\
\varphi \to \forall x \psi(x) & \equiv & \forall x(\varphi \to \psi(x)) \\
\exists x \psi(x) \to \varphi & \equiv & \forall x(\psi(x) \to \varphi) \\
\forall x \psi(x) \to \varphi & \equiv & \exists x(\psi(x) \to \varphi)
\end{array}$$

Musterlösung.

(a) Durch wiederholt Anwenden der folgenden Äquivalenzen

$$\begin{array}{rcl}
\neg(\varphi \vee \psi) & \equiv & \neg\varphi \wedge \neg\psi \\
\neg(\varphi \wedge \psi) & \equiv & \neg\varphi \vee \neg\psi \\
\varphi \to \psi & \equiv & \neg\varphi \vee \psi \\
\neg(\varphi \to \psi) & \equiv & \varphi \wedge \neg\psi \\
\neg(\exists x P x) & \equiv & \forall x \neg P x \\
\neg(\forall x P x) & \equiv & \exists x \neg P x,
\end{array}$$

kann man erreichen, dass alle Implikationszeichen eliminiert werden und letztendlich alle Negationszeichen nur noch direkt vor atomare Teilformeln vorkommen.

(b) Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation. Die ersten zwei Paare von Formeln sind wahr, falls $\mathfrak{I}(\varphi) = 0$. Ist $\mathfrak{I}(\varphi) = 1$, dann haben die Formeln im ersten Paar denselben Wahrheitswert wie $\exists x \psi(x)$, und die Formeln im zweiten Paar denselben wie $\forall x \psi(x)$.

Die letzten zwei Paare von Formeln sind wahr, falls φ wahr ist. Ist φ falsch, dann ist

$$\mathfrak{I}(\exists x \psi(x) \to \varphi) = \mathfrak{I}(\neg \exists x \psi(x)) = \mathfrak{I}(\forall x \neg \psi(x)) = \mathfrak{I}(\forall x(\psi(x) \to \varphi))$$

und

$$\mathfrak{I}(\forall x \psi(x) \to \varphi) = \mathfrak{I}(\neg \forall x \psi(x)) = \mathfrak{I}(\exists x \neg \psi(x)) = \mathfrak{I}(\exists x(\psi(x) \to \varphi)).$$

(E4.2)

$\preccurlyeq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preccurlyeq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \land x_3 \preccurlyeq x_2) \land \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \land x_4 \preccurlyeq x_2) \to x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big).$$

(a) Sei $\mathcal{A} = (A, \preccurlyeq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0,1,2\}$ und $\preccurlyeq^{\mathcal{A}} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,2)\}$. Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.

Hinweis:

(i) Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.

(ii) Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.

(iii) Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \land x_3 \preccurlyeq x_2) \land \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \land x_4 \preccurlyeq x_2) \to x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big)$$

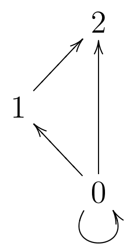
äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

Musterlösung.

(a) Eine Menge mit einer zweistelligen Relation ist i.A. ein (gerichteter) Graph, also kann man $\mathcal{A}$ folgendermaßen darstellen



und $\varphi^{\mathcal{A}}$ bedeutet, dass es zu zwei Elementen x_1 und x_2 ein Element x_3 gibt, mit $x_3 \to x_1$ und $x_3 \to x_2$ und es zu jedem x_4 mit $x_4 \to x_1$ und $x_4 \to x_2$ eine Kante $x_4 \to x_3$ gibt. Man überprüft leicht, dass für $x_1 \mapsto 2$ und $x_2 \mapsto 2$ kein x_3 mit der benötigten Eigenschaft existiert, also $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Als nächstes formen wir φ in Negationsnormalform um:

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \land x_3 \preccurlyeq x_2) \land \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \land x_4 \preccurlyeq x_2) \to x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \land x_3 \preccurlyeq x_2) \land \forall x_4 \big(\neg (x_4 \preccurlyeq x_1 \land x_4 \preccurlyeq x_2) \lor x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \land x_3 \preccurlyeq x_2) \land \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \lor \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \lor x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big)}_{=:\varphi'}
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass für beliebige $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ der Falsifizierer in der Spielposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ *eine Gewinnstrategie hat*: Angenommen der Falsifizierer zieht von der Position

$$\Big(\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big)\Big), (a_1, a_2, a_3, a_4)\Big)$$

nach

$$\Big(\forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big)\Big), (2, a_2, a_3, a_4)\Big)$$

und von dort nach

$$\Big(\exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big)\Big), (2, 2, a_3, a_4)\Big)$$

dann hat der Verifizierer drei Möglichkeiten zu ziehen:

$a_3 \mapsto 2$:

$$\Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (2, 2, 2, a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2, (2, 2, 2, a_4)\Big)$$

und

$$\Big(x_3 \preccurlyeq x_1, (2, 2, 2, a_4)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 2 \preccurlyeq 2$.

$a_3 \mapsto 1$:

$$\Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (2, 2, 1, a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (2, 2, 1, a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3, (2, 2, 1, 1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preccurlyeq 1$ und $\mathcal{A} \models 1 \preccurlyeq 2$.

$a_3 \mapsto 0$:

$$\Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (2, 2, 0, a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (2, 2, 0, a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3, (2, 2, 0, 1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preccurlyeq 0$ und $\mathcal{A} \models 1 \preccurlyeq 2$.

Also hat der Falsifizierer eine Gewinnstrategie, und es gilt $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(b) Wir zeigen, dass der Verifizierer für alle $(a_1', a_2') \in A \times A \setminus \{(2,2)\}$ eine Gewinnstrategie hat:
Der Verifizierer zieht von $(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$ nach

$$\Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (a_1', a_2', 0, a_4)\Big)$$

Der Falsifizierer hat nun zwei Zugmöglichkeiten:

(1) Er zieht nach

$$\big(x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2, (a_1', a_2', 0, a_4)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preccurlyeq x$ für alle $x \in A$.

(2) Er zieht nach

$$\big(\forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (a_1', a_2', 0, a_4)\big)$$

dann hat der Falsifizierer im nächsten Zug drei Möglichkeiten:

(i) Er zieht nach

$$\big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3, (a_1', a_2', 0, 0)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preccurlyeq 0$

(ii) Er zieht nach

$$\big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3, (a_1', a_2', 0, 1)\big)$$

oder

$$\big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3, (a_1', a_2', 0, 2)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer in zwei Zügen, da a_1' oder a_2' ungleich 2 ist und $\mathcal{A} \not\models 1 \preccurlyeq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 1 \preccurlyeq 0$ bzw. $\mathcal{A} \not\models 2 \preccurlyeq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 2 \preccurlyeq 0$ gelten.

(E4.3)

Wir betrachten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x[\exists y(Rxy \wedge \neg\exists x Ryx) \vee \forall y \exists z(Rxz \wedge Rzy)] \\
\varphi_2 &:= \exists x[\forall y \neg Rxy \rightarrow \exists y \forall z(Rxy \wedge Rzy)] \\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y[Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy \wedge \neg\exists x(Rzx \wedge Rxz))]
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie äquivalente Formeln in Pränex-Normalform an.

(b) Wandeln Sie ihre Ergebnisse aus (a) in Skolem-Normalform um.

(c) Betrachten Sie die Formel $\varphi := \forall x \exists y Rxy$ und die Skolem-Normalform $\psi := \forall x Rxsx$.

(i) Beweisen Sie, daß $\psi \models \varphi$ gilt.

(ii) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass $\varphi \not\models \psi$.

Musterlösung.

(a)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall x \exists y \forall u \forall v \exists z[(Rxy \wedge \neg Ryu) \vee (Rxz \wedge Rzv)] \\
\varphi_2 &\equiv \exists x \exists y \exists u \forall z[\neg Rxy \rightarrow (Rxu \wedge Rzu)] \\
\varphi_3 &\equiv \forall x \forall y \exists z \forall u[Rxy \rightarrow (Rxz \wedge Rzy \wedge \neg(Rzu \wedge Ruz))]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: \forall x \forall u \forall v[(Rxfx \wedge \neg Rfxu) \vee (Rxgxuv \wedge Rgxuvv)] \\
\varphi_2 &: \forall z[\neg Rcd \rightarrow (Rce \wedge Rze)] \\
\varphi_3 &: \forall x \forall y \forall u[Rxy \rightarrow (Rxfxy \wedge Rfxyy \wedge \neg(Rfxyu \wedge Rufxy))]
\end{aligned}$$

(c)
(a) Angenommen $(\mathcal{A}, \beta) \models \psi$. Um zu zeigen, daß $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ betrachten wir ein beliebiges Element $a \in A$. Nach Annahme gilt $(a, s^{\mathcal{A}}(a)) \in R^{\mathcal{A}}$. Insbesondere gibt es also ein Element b (nämlich $b = s^{\mathcal{A}}(a)$) mit $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$. Wir haben gezeigt, daß $(\mathcal{A}, \beta) \models \forall x \exists y Rxy$.

(b) Sei $\mathcal{A} = (A, s^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$ die Struktur mit

$$A = \{0, 1\}, \quad s^{\mathcal{A}}(a) := 0, \quad R^{\mathcal{A}} := \{(0, 1), (1, 1)\}.$$

Dann gilt $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{A} \not\models \psi$.

(E4.4)

(a) Geben Sie für folgende FO-Formeln jeweils eine Skolemnormalform an:

(i) $\forall x \exists y Rxy$

(ii) $\forall x(\forall y Ryy \rightarrow \exists y Ryf(x))$

(b) Geben Sie einige verschiedene Herbrandmodelle für die Skolemnormalformen aus (a) an.

Musterlösung.

(a) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:

(i) $\forall x Rxs(x)$

(ii)

$$\forall x(\forall y Ryy \rightarrow \exists y Ryf(x)) \quad \equiv \quad \forall x \exists z \exists y(Rzz \rightarrow Ryf(x))$$

Skolemnormalform: $\forall x(Rs(x)s(x) \rightarrow Rs'(x)f(x))$

(b) In beiden Fällen geben wir noch ein Konstantensymbol c zur Signatur hinzu. Dann erhalten wir für (i) die Trägermenge $T = \{s^i(c) : i \in \mathbb{N}\}$, wobei s^i für das i-malige Anwenden von s steht (d.h. T ist isomorph zur Menge der natürlichen Zahlen). Die Relation R kann z.B. durch $\{(s^i(c), s^{i+1}(c)) : i \in \mathbb{N}\}$ bzw. jeder Obermenge davon interpretiert werden.

In Fall (ii) erhalten wir die Termstruktur $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{i+1} = \{s(t), s'(t), f(t) : t \in T_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (d.h. einen Baum, wobei jeder Knoten genau drei Nachfolger hat). Die Relation R kann z.B. durch $\emptyset$ oder $T \times T$ interpretiert werden.