Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17. Juni, 2009

3. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E3.1)

Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Musterlösung.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q,p\vdash p,r}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{q,p\vdash q,r}\,(\mathrm{Ax})}{q,p\vdash p\wedge q,r}\,(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{}{r,p\vdash p\wedge q,r}\,(\mathrm{Ax})}{q\vee r,p\vdash p\wedge q,r}\,(\vee\mathrm{L})}{q\vee r\vdash p\wedge q,r,\neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p\wedge q,\neg(q\vee r),r,\neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p\wedge q,\neg(q\vee r),r\vee\neg p}\,(\vee\mathrm{R})}{\vdash p\wedge q,\neg(q\vee r)\vee r\vee\neg p}\,(\vee\mathrm{R})}{\vdash (p\wedge q)\vee\neg(q\vee r)\vee r\vee\neg p}\,(\vee\mathrm{R})$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,q\vdash p,p\wedge r}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{p,q\vdash q,p\wedge r}\,(\mathrm{Ax})}{p,q\vdash p\wedge q,p\wedge r}\,(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{\dfrac{}{p,r\vdash p\wedge q,p}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{p,r\vdash p\wedge q,r}\,(\mathrm{Ax})}{p,r\vdash p\wedge q,p\wedge r}\,(\wedge\mathrm{R})}{p,q\vee r\vdash p\wedge q,p\wedge r}\,(\vee\mathrm{L})}{p,q\vee r\vdash (p\wedge q)\vee(p\wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \vdash q, q \qquad r \vdash q, p}{r \vdash q, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R}) \qquad \dfrac{}{r \vdash r, p \wedge q}\,(\mathrm{Ax})}{r \vdash q \wedge r, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R})}{\neg(p \wedge q), r \vdash q \wedge r}\,(\neg\mathrm{L})}{\neg(p \wedge q) \wedge r \vdash q \wedge r}\,(\wedge\mathrm{L})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r), q \wedge r}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

Eine nicht erfüllende Belegung ist z.B. $r \mapsto 1$ und $q, p \mapsto 0$.

(E3.2)

Der Sequenzenkalkül wie in der Vorlesung vorgestellt enthält als Axiome die Instanzen von der Sequenz

$$\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$$

worin φ eine aussagenlogische Variable p ist. Beweisen Sie, dass Sie damit alle Instanzen von dieser Sequenz ableiten können.

Musterlösung.

Wir beweis mit Induktion über die Aufbau von φ: $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$ ist ableitbar für alle Γ und Δ.

Für aussagenlogische Variablen ist die Sequenz ableitbar, weil es ein Axiom ist.

Ist $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, dann sind, nach Induktionsvoraussetzung, $\Gamma, \varphi_1 \vdash \Delta, \varphi_1, \varphi_2$ und $\Gamma, \varphi_2 \vdash \Delta, \varphi_1, \varphi_2$ ableitbar.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \Delta, \varphi_1, \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \Delta, \varphi_1, \varphi_2}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \Delta, \varphi_1, \varphi_2}}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}$$

Damit ist auch $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$ ableitbar.

Der Fall $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ geht analog.

Aus $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$ ist durch Anwendung von $(\neg R)$ und $(\neg L)$ die Sequenz $\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta, \neg\varphi$ abzuleiten.

Sind $\Gamma, \varphi_1 \vdash \Delta, \varphi_1, \varphi_2$ und $\Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \Delta, \varphi_2$ ableitbar, dann ist mit

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \Delta, \varphi_1, \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \Delta, \varphi_2}{\Gamma, \varphi_1, \varphi_1 \to \varphi_2 \vdash \Delta, \varphi_2}}{\Gamma, \varphi_1 \to \varphi_2 \vdash \Delta, \varphi_1 \to \varphi_2}$$

auch $\Gamma, \varphi_1 \to \varphi_2 \vdash \Delta, \varphi_1 \to \varphi_2$ ableitbar.

Damit ist der Beweis fertig.

(E3.3)

(a) Geben Sie eine FO-Formel an, die erfüllbar ist, aber nur unendliche Modelle hat.

(b) Geben Sie eine FO-Formel an, die besagt, dass die Trägermenge genau n Elemente enthält.

(c) Begründen Sie, warum die folgende Formel wahr ist.

$$\varphi = \exists x\,(\,Px \to \forall y P(y)\,).$$

Musterlösung.

(a) Zum Beispiel:

$$(\forall x)(\exists y)\,(x < y) \wedge (\forall x)\,\neg(x < x) \wedge \forall x \forall y \forall z\,(x < y \wedge y < z \to x < z).$$

(b) Die Trägermenge enthält mindestens n Elemente:

$$\varphi = (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\,\bigwedge_{i \neq j}(x_i \neq x_j)$$

Die Trägermenge enthält höchstens n Elemente:

$$\psi = (\forall x_1)\ldots(\forall x_{n+1})\,\bigvee_{i \neq j}(x_i = x_j).$$

Die Trägermenge enthält genau n Elemente:

$$\varphi \wedge \psi.$$

(c) Entweder gilt $P(a)$ für alle a, oder nicht. Wenn es für alle a gilt, dann ist $\forall y P(y)$ wahr und damit auch φ. Wenn es eine Ausnahme gibt, also eine a, so dass $P(a)$ nicht gilt, können wir für x dieses a wählen. Dann ist die Annahme in $P(a) \to \forall y P(y)$ falsch und damit ist die ganze Aussage richtig.

(E3.4)

Betrachten Sie die Signatur $S = \{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$.

Zeigen Sie, dass in den folgenden S-Strukuren die Ordnung definierbar ist, d.h. dass es für jede der folgenden S-Strukturen $\mathcal{A}$ eine Formel ohne das $\leqslant$-Symbol $\varphi(x, y)$ gibt, so dass

$$a \leqslant^{\mathcal{A}} a' \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a, a'].$$

(a) $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, \leqslant^{\mathbb{N}}, 0, 1)$

(b) $\mathcal{P} = (\mathcal{P}X, \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, X)$

(c) $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, \leqslant^{\mathbb{R}}, 0, 1)$

Extra: Überlegen Sie sich, warum die Ordnung der ganzen Zahlen (im Gegensatz zu (i)) nicht allein aus Addition und 0 definierbar sein kann.

Musterlösung.

(a) $\varphi(x, y) := \exists z\, (x + z = y)$

(b) $\varphi(x, y) := x + y = y$ oder $\varphi(x, y) := x \cdot y = x$ oder $\varphi(x, y) := \exists z\, (x + z = y)$

(c) $\varphi(x, y) := \exists z\, (x + z \cdot z = y)$