Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Juni, 2009

2. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E2.1)

Seien φ und ψ AL-Formeln. Wie kann man das Resolutionsverfahren benutzen, um zu überprüfen, ob

(a) φ unerfüllbar ist;

(b) φ erfüllbar ist;

(c) φ allgemeingültig ist;

(d) φ nicht allgemeingültig ist;

(e) $\varphi \models \psi$;

(f) eine endliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist;

(g) eine unendliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist?

Musterlösung.

(a) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$ ($K(\varphi)$ bezeichnet die Klauselmenge zu φ.)

(b) $\Box \notin \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$

(c) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(d) $\Box \notin \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(e) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi \wedge \neg\psi))$

(f) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi))$

(g) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi_0))$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

(E2.2)

Seien

$$\varphi := (p \vee q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$
$$\psi := (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass

(a) φ erfüllbar ist;

(b) $\varphi \models \psi$ gilt.

Musterlösung.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^0(K) &= \big\{\{p,q\},\ \{q,\neg r\},\ \{p,\neg q,r\}\big\}\\
\mathrm{Res}^1(K) &= \mathrm{Res}^0(K) \cup \big\{\{p,r\},\ \{p,r,\neg r\}, \{p,q,\neg q\}\big\}\\
\mathrm{Res}^2(K) &= \mathrm{Res}^1(K) \cup \big\{\{p,q,\neg r\}\big\}\\
\mathrm{Res}^3(K) &= \mathrm{Res}^2(K)
\end{aligned}$$

(b) Klauseln: $\{p,q\},\ \{q,\neg r\},\ \{p,\neg q,r\},\ \{p,\neg r\},\ \{\neg p,r\},\ \{\neg p,\neg q,\neg r\}$

$$\begin{tikzcd}
\{q,\neg r\} \arrow[d] & \{\neg p,\neg q,\neg r\} \arrow[dl] & & \{p,q\} \arrow[d] & \{p,\neg q,r\} \arrow[dl] \\
\{\neg p,\neg r\} \arrow[dr] & \{\neg p,r\} \arrow[d] & & \{p,r\} \arrow[d] & \{p,\neg r\} \arrow[dl] \\
& \{\neg p\} \arrow[dr] & & \{p\} \arrow[dl] & \\
& & \Box & &
\end{tikzcd}$$

(E2.3)

(a) Für Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jedes Modell, das alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Eine Interpretation $\mathcal{I} : \mathcal{V} = \{p_1, p_2, \ldots\} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als eine unendliche Bit-Sequenz. P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, $\overline{P}$ das Komplement von P. Wir betrachten ein P, so dass sowohl P als auch $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$\begin{aligned}
P &= \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \models \Phi\}\\
\overline{P} &= \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \models \Psi\}
\end{aligned}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$.

Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ sogar schon durch einzelne AL-Formeln φ und ψ spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

Musterlösung.

(a) Wenn $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ gilt, dann hat die Menge $\Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle, wobei $\neg\Psi = \{\neg\psi : \psi \in \Psi\}$. Der Kompaktheitssatz impliziert dann, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle hat. Setzen wir $\Phi_0 = \{\varphi \in \Phi : \varphi \in \Gamma\}$ und $\Psi_0 = \{\psi \in \Psi : \neg\psi \in \Gamma\}$, dann heißt das, dass $\Gamma = \Phi_0 \cup \neg\Psi_0$ keine Modelle hat, also $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Die Vereinigung $\Phi \cup \Psi$ kann keine Modelle haben, da solche Modelle sowohl als auch zu P als $\overline{P}$ gehören würden. Der Kompaktheitssatz sagt jetzt, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi \cup \Psi$ keine Modelle hat. Da jede Formel in Γ entweder zu Φ oder zu Ψ gehört, muss Γ von der Form

$$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$$

sein, wobei $\varphi_i \in \Phi$ und $\psi_i \in \Psi$. Wenn wir schreiben $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ und $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$, dann sind die Modelle von φ genau die Elemente von P und die Modelle von ψ genau die Elemente von $\overline{P}$. Diese Behauptung folgt aus den folgenden drei Tatsachen:

1. Elemente von P sind Modelle von φ und Elemente von $\overline{P}$ sind Modelle von ψ.
2. Es gibt keine Modellen die gleichzeitig φ und ψ wahr machen.
3. Jedes Modell gehört entweder zu P oder zu $\overline{P}$.

(E2.4)

Wir betrachten folgenden Beweiskalkül von Shoenfield (1967) für das System $\{\neg, \vee\}$:

Axiome: $\neg\varphi \vee \varphi$

Regeln: $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\varphi \vee \varphi}{\varphi} \qquad \dfrac{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}{(\varphi \vee \psi) \vee \chi} \qquad \dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \neg\varphi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$

Wir schreiben $\Phi \vdash \psi$, falls es einen Beweisbaum gibt, dessen Blätter Axiome oder Aussagen in Φ sind und dessen Wurzel ψ ist. Beweisen Sie:

(a) $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$.

(b) $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (wie üblich betrachten wir $\varphi \to \psi$ als eine Abkürzung für $\neg\varphi \vee \psi$).

(c) $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vdash \psi$.

(d) $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$.

(e) $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$.

Musterlösung.

(a)

$$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \neg\varphi \vee \varphi}{\psi \vee \varphi}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \neg\varphi \vee \psi}{\psi \vee \psi}}{\psi}$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\neg\varphi}{\neg\varphi \vee \psi}}{\psi \vee \psi}}{\psi}$$

(d) Aus $\neg\varphi \vee \varphi$ und $\neg\neg\varphi$ folgt mit (c) φ.

(e)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\neg\varphi}{\neg\varphi \vee \psi}}{\psi \vee \psi}}{\psi}$$