Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27. Mai, 2009

1. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E1.1)

Wir betrachten ein Netzwerk mit vier Ports (Ports 1, 2, 3 und 4), die jeweils entweder aktiv (A) oder inaktiv und entweder offen (O) oder geschlossen sind. Wir führen aussagenlogische Variablen p_{iA} ein für "Port i ist aktiv" und p_{iO} für "Port i ist offen". Formalisieren Sie folgende Aussagen in der Aussagenlogik:

(a) Wenn Port 1 offen ist, dann ist Port 2 offen oder Port 3 inaktiv.

(b) Ports 1 und 2 sind nicht beide aktiv.

(c) Höchstens zwei Ports sind offen.

(d) Von je drei Ports ist mindestens einer inaktiv.

Musterlösung.

Mögliche Lösungen sind:

(a) $p_{1O} \rightarrow (p_{2O} \vee \neg p_{3A})$

(b) $\neg(p_{1A} \wedge p_{2A})$

(c) $\bigvee_{i \neq j}(\neg p_{iO} \wedge \neg p_{jO})$ (mindestens zwei Ports sind geschlossen)

(d) $\bigwedge_{i \neq j, i \neq k, j \neq k}(\neg p_{iA} \vee \neg p_{jA} \vee \neg p_{kA})$ oder
$\bigvee_{i \neq j}(\neg p_{iA} \wedge \neg p_{jA})$ (mindestens zwei Ports sind inaktiv)

(E1.2)

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee (\neg q \wedge r))$$

Ist die Formel erfüllbar? Ist sie allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine Formel zu folgender Wahrheitstafel an:

p	q	r	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn höchtens ein der Variablen p, q, r wahr ist.

(d) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r, s)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn genau drei der Variablen denselben Wert haben.

Musterlösung.

(a) Wahrheitstafel:

p	q	r	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee (\neg q \wedge r)$	φ
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Die Formel ist also erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(b) $\varphi := (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

(c) $\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$

(d) $$\begin{aligned}\varphi := {} & (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \\ & \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \\ & \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s)\end{aligned}$$

(E1.3)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen.

(i) $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \to \psi$.

(ii) Wenn $\varphi \models \psi$ und φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iii) Wenn $\varphi \models \psi$ und ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iv) $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ genau dann, wenn $\varphi \models \vartheta$ oder $\psi \models \vartheta$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen und Folgerungsbeziehungen.

(i) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

(ii) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

(iii) $\{\neg\psi, \psi \to \varphi\} \models \neg\varphi$

(iv) $\{\neg\varphi, \psi \to \varphi\} \models \neg\psi$

Musterlösung.

(a) (i) Richtig.

$\Rightarrow$: Ist $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, dann gilt entweder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$ oder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$. In dem ersten Fall, gilt $(\varphi \to \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$, also $\mathfrak{I} \models \varphi \to \psi$. In dem zweiten Fall, gilt auch $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$, da $\varphi \models \psi$ bedeutet, dass jede Interpretation die φ wahr macht auch ψ wahr macht. Also auch in diesem Fall $(\varphi \to \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$.

$\Leftarrow$: Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \varphi$, also $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$. Da auch $\mathfrak{I} \models \varphi \to \psi$, muss auch gelten $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$ und $\mathfrak{I} \models \psi$. Damit ist $\varphi \models \psi$ gezeigt.

(ii) Richtig. $\varphi \models \psi$ heißt, dass jede Interpretation die φ wahr macht auch ψ wahr macht. Machen alle Interpretationen φ wahr, dann gilt das auch für ψ, oder gibt es eine Interpretation die φ wahr macht, dann gilt das auch für ψ.

(iii) Falsch (in beiden Fällen). $0 \models 1$, aber es gibt keine Modelle für 0, und alle Modelle machen 1 wahr.

(iv) Falsch. Gegenbeispiel: $\varphi = p, \psi = \neg p, \vartheta = 0$.

(b) (i) Richtig. Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \neg(\varphi \vee \psi)$, also $\neg(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\neg(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 1 &\Leftrightarrow (\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{I}} = 0 \quad \text{und} \quad \psi^{\mathfrak{I}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1 \quad \text{und} \quad (\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \\
&\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1
\end{aligned}$$

Also, $\mathfrak{I} \models \neg(\varphi \vee \psi)$ gdw $\mathfrak{I} \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

(ii) Falsch. Ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I}(p) = 1$ und $\mathcal{I}(q) = 0$, dann gilt $(\neg(\varphi \vee \psi))^{\mathcal{I}} = 0$ und $(\neg\varphi \vee \neg\psi)^{\mathcal{I}} = 1$.

(iii) Falsch. Ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I}(p) = 1$ und $\mathcal{I}(q) = 0$, dann gilt $(\neg\psi)^{\mathcal{I}} = 1$, $(\psi \to \varphi)^{\mathcal{I}} = 1$ und $(\neg\varphi)^{\mathcal{I}} = 0$.

(iv) Richtig. Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \{\neg\varphi, \psi \to \varphi\}$, also $(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\psi \to \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Es folgt $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$. Da $(\neg\psi \vee \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ oder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$, folgt $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ wie gewünscht.

(E1.4)

Für $n \geqslant 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, \dots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, daß

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat;

(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(c) jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder hat.

Musterlösung.

(a) Für jedes $i \leqslant n$, muß genau eine der Variablen p_{2i-1} und p_{2i} wahr sein. Es gibt also genau so viele Modelle, wie es Funktionen $\{1, \dots, n\} \to \{1, 2\}$ gibt. Dies sind 2^n.

(b) $\varphi_n \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} [(\neg p_{2i-1} \lor \neg p_{2i}) \land (p_{2i-1} \lor p_{2i})]$

(c) Angenommen, es gibt eine Formel $\bigvee_{i=1}^{m} \psi_i$ in DNF mit $m < 2^n$ Disjunktionsgliedern. Für jedes Modell $\mathfrak{J}$ von φ_n, muß es ein Disjunktionsglied ψ_k geben mit $\mathfrak{J} \models \psi_k$. Somit existiert mindestens ein Disjunktionsglied ψ_k mit mehr als einem Modell.

Da ψ_k mehr als ein Modell hat, gibt es mindestens eine Variable p_i, so daß weder p_i noch $\neg p_i$ in ψ_k vorkommen. Sei p_j der »Partner« von p_i, d. h., $j = i + 1$, wenn i ungerade ist, und $j = i - 1$, falls i gerade ist.

Wir wählen ein Modell $\mathfrak{J}$ von ψ_k. Sei $\mathfrak{J}'$ die Interpretation mit $\mathfrak{J}'(p_i) = \mathfrak{J}(p_j)$ und $\mathfrak{J}'(p_l) = \mathfrak{J}(p_l)$, für alle $l \neq i$. Dann folgt, daß $\mathfrak{J}' \models \psi_k$ und somit $\mathfrak{J}' \models \varphi_n$. Dies ist aber unmöglich, da $\mathfrak{J}' \models p_i \leftrightarrow p_j$.