Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

6. Juli, 2009

3. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

Abgabe: Mi 15.7. (oder Fr 17.7.), in der Übung

(H3.1)

Sei $L = \{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$ die Sprache der Arithmetik und sei

$$T = Th(\mathbb{N}, +, \cdot, \leqslant 0, 1)$$

die Menge der Formeln in der Sprache L, die wahr sind in den natürlichen Zahlen. Wie in der Vorlesung besprochen hat T auch Modelle die verschieden sind von $\mathbb{N}$. Sei ${}^*\mathbb{N}$ so ein Modell. Man kann $\mathbb{N}$ in ${}^*\mathbb{N}$ einbetten durch die Abbildung

$${}^*(-) : \mathbb{N} \to {}^*\mathbb{N} : n \mapsto {}^*n = (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-\text{mal}})^{{}^*\mathbb{N}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung ${}^*(-)$ ein injektiver Homomorphismus ist.

Hinweis: Verwenden Sie hier und in den nächsten Teilaufgaben, dass alles, was wahr ist in $\mathbb{N}$ *und sich in der Logik 1. Stufe ausdrücken lässt*, auch wahr ist in ${}^*\mathbb{N}$ und umgekehrt.

(b) Zeigen Sie, dass alle Elemente, die nicht im Bild von ${}^*(-)$ liegen, größer als jedes ${}^*n$ sein müssen. Wir nennen diese Elemente *unendlich.*

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes unendliches Element x in ${}^*\mathbb{N}$ ein anderes unendliches Element y gibt, so dass $2y \leqslant x$.

(H3.2)

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y(Rxy \to (Px \leftrightarrow \neg Py)) \\
\varphi_3 &:= \forall x \exists y(Rxy \wedge (Py \leftrightarrow Ryx))
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie *durch Grundinstanzenresolution*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ nicht erfüllbar ist.

(b) Je zwei der drei Formeln $\varphi, \varphi_2, \varphi_3$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies für alle drei Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

(H3.3)

Beweisen Sie

$$\varphi := \exists x(Px \rightarrow \forall y Py)$$

(a) mit Resolution.

(b) im Sequenzenkalkül.

(H3.4)

Wir betrachten Sätze von der Gestalt

$$\forall x_0 \ldots \forall x_n \exists y_0 \ldots \exists y_m \varphi(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m),$$

wobei $\varphi(x, y)$ keine Quantoren enthält, keine Funktionssymbole und auch nicht das Gleichheitssymbol $=$.

(a) Zeigen Sie, dass die Frage ob ein bestimmte solcher Satz allgemeingültig ist, entscheidbar ist und skizzieren Sie ein Entscheidungsverfahren.

(b) Ist die Allgemeingültigkeit immer noch entscheidbar, wenn in φ das Gleichheitssymbol vorkommen darf?

(c) Ist die Allgemeingültigkeit immer noch entscheidbar, wenn wir Funktionssymbole in φ zulassen?