Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24. Juni, 2009

2. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

Abgabe: Mi 1.7. (oder Fr 3.7.), in der Übung

(H2.1)

(a) Weisen Sie *semantisch* die Korrektheit der folgenden Sequenzenregel nach:

$$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}$$

(b) Leiten Sie die folgende Sequenz in $\mathcal{SK}$ ab:

$$\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$$

(H2.2)

Wir wollen Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ mit Hilfe der Prädikatenlogik definieren. Wie im Skript, S. 3, definieren wir zu einem nichtleeren Wort $z = c_1 \dots c_n$ eine *Wortstruktur*

$$\mathcal{W}(z) = (\{1, \dots, n\}, <, P_a, P_b)$$

wobei $\quad P_a := \{\, i \leqslant n \mid c_i = a \,\} \quad$ und $\quad P_b := \{\, i \leqslant n \mid c_i = b \,\}$.

(Wir schließen das leere Wort aus, da es keine leeren Strukturen gibt.) Ein Satz φ definiert dann die Sprache $L(\varphi) := \{\, z \in \Sigma^+ \mid \mathcal{W}(z) \models \varphi \,\}$.

(a) Welche Sprachen definieren die folgenden Formeln?

(i) $\forall x \forall y[x < y \to ((P_a x \to P_a y) \wedge (P_b y \to P_b x))]$

(ii) $\forall x \forall y[(x < y \wedge P_a x \wedge P_a y) \to \exists z(x < z \wedge z < y \wedge P_b z)]$

(b) Geben Sie zu den folgenden Sprachen Formeln an, welche sie definieren.

(i) $L((a + b)^* bb(a + b)^*)$

(ii) $L((ab)^+)$

(c) Wir definieren die Menge der $*$-*freien regulären Ausdrücke* induktiv durch

- $\emptyset$ und jedes Element von Σ sind $*$-freie reguläre Ausdrücke;

- sind α und β $*$-freie reguläre Ausdrücke, so auch $\alpha\beta$, $\alpha + \beta$ und $\sim\alpha$.

Die Semantik eines solchen Ausdrucks ist wie für reguläre Ausdrücke definiert, wobei die Operation $\sim$ für die Komplementierung steht: $L(\sim\alpha) := \Sigma^* \setminus L(\alpha)$. Konstruieren Sie (induktiv) zu einem gegebenen $*$-freien regulären Ausdruck α eine Formel $\varphi_\alpha(x, y)$, so daß

$$\mathcal{W}(c_1 \dots c_n) \models \varphi_\alpha[i, k] \quad \text{gdw} \quad 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n \text{ und } c_i \dots c_k \in L(\alpha).$$

(H2.3)

Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln:

(a) $\forall x(Px \vee \exists x \neg Px)$

(b) $\exists x(\forall y Ryy \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy)))$

(c) $\forall x \exists y Pxy \rightarrow \forall x \exists y Rxy$

(d) $\forall y(Py \vee \forall x(\forall z(Rxz \rightarrow Pz) \rightarrow \exists u(Ruy)))$

Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.

(H2.4)

Seien

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \exists x \forall y(Rxy \rightarrow Py) \\ \varphi_2 &:= \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \\ \varphi_3 &:= \forall x(Px \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \neg Py)) \\ \varphi_4 &:= \forall x \exists y Rxy \end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies für alle vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.