Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Juni, 2009

1. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

Abgabe: Mi 17.6. (oder Fr 19.6.), in der Übung

(H1.1)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph (ohne Schleifen). Wir nennen G 3-*färbbar,* wenn es eine Abbildung $f : V \to \{1, 2, 3\}$ gibt, so dass für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

(a) Erstellen Sie eine Formelmenge $\Phi(G)$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn G 3-färbbar ist.

Hinweis. Führen Sie zu jedem Knoten $v \in V$ von G drei Variablen p_1^v, p_2^v, p_3^v für die drei Farben ein.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass ein Graph G genau dann 3-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph 3-färbbar ist. ($H = (V_0, E_0)$ ist ein Teilgraph von G, wenn $V_0 \subseteq V$ und $E_0 \subseteq E$ ist.)

(H1.2)

Eine Formelmenge Δ heißt ein Axiomensystem für eine Formelmenge Γ, falls Γ und Δ dieselbe Modelle haben. Γ heißt endlich axiomatisierbar, falls es ein endliches Axiomensystem für Γ gibt.

Sei $\Gamma = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, wobei für $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt: $\models \varphi_{i+1} \to \varphi_i$ und $\not\models \varphi_i \to \varphi_{i+1}$. Zeigen Sie, dass Γ nicht endlich axiomatisierbar ist.

(H1.3)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee s).$$

(b) Seien

$$\begin{aligned} \varphi &:= (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r), \\ \psi &:= (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r). \end{aligned}$$

Weisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode nach, dass $\varphi \models \psi$.

(H1.4)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus aus der Vorlesung die minimale Belegung der folgenden Menge von Hornklauseln.

$$\{\neg q, \neg r, t\}, \{\neg s, q\}, \{\neg s, \neg t, \neg u, p\}, \{\neg r, \neg s, q\}, \{\neg r, \neg u, v\}, \{s\},$$
$$\{\neg p, \neg u, \neg v, r\}, \{\neg s, r\}, \{\neg r, \neg s, \neg t, \neg u, v\}.$$