Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Juli, 2009

6. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E6.1)

Seien P, Q und S einstellige Relationssymbole, R ein zweistelliges Relationssymbol und Φ die Formelmenge:

(1) $\forall x \forall y\, ((Q(x) \wedge R(x, y)) \rightarrow S(y))$.

(2) $\forall x \forall y\, ((S(x) \wedge R(x, y)) \rightarrow \neg Q(y))$.

(3) $\forall x \exists y\, (R(x, y) \wedge Q(y))$.

(a) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

(b) Begründen Sie intuitiv, warum diese Formelmenge nicht erfüllbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie R als die Kantenrelation eines Graphen und P, Q und S als Farben, wobei $P(x)$ bedeutet, dass der Knoten x die Farbe P hat.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.

(E6.2)

Seien R und E zweistellige Relationssymbole und Φ die Formelmenge:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \forall x Exx\,, \\
(2) & \forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx)\,, \\
(3) & \forall x \forall y \forall z (Exy \wedge Eyz \rightarrow Exz)\,, \\
(4) & \forall x \forall y (\neg Exy \rightarrow \exists z (\neg Exz \wedge \neg Eyz \wedge Rxz \wedge \neg Ryz))\,, \\
(5) & \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)\,, \\
(6) & \forall x \forall y (Exy \rightarrow \neg Rxy)\,, \\
(7) & \forall x \exists y Rxy\,, \\
(8) & \exists x \forall y (\neg Exy \rightarrow Rxy)\,.
\end{array}
$$

(a) (1)–(3) besagen, dass E eine Äquivalenzrelation ist. Was ist die anschauliche Bedeutung der Formeln (4)–(8), wenn man E als (Modellierung der) Gleichheit betrachtet? Können Sie ein kleinstmögliches Modell von (1)–(7) angeben?

(b) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.

(E6.3)

Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

(i) $\forall x R(x, f(x)) \vdash \exists x R(f(x), f(f((x))))$.

(ii) $\forall x f(x, x) = x \vdash \forall x (P(x) \vee \neg P(f(x, x)))$.

(iii) $\exists y \forall x R(x, y) \vdash \forall x \exists y R(x, y)$.

(iv) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, vorausgesetzt, dass $x \notin \text{frei}(\psi)$.

(E6.4)

Beweisen Sie die gegebene Folgerungsbeziehung sowohl im Sequenzenkalkül als auch durch Resolution.

$$\forall x \neg P(x), \neg \exists x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$$