Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Juli, 2009

5. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E5.1)

Zeigen Sie, dass wenn T_1 und T_2 zwei Theorien sind, so dass $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, es ein Satz σ gibt, so dass $T_1 \models \sigma$ und $T_2 \models \neg\sigma$.

(E5.2)

Zeigen Sie, dass eine Theorie T, die beliebig grosse endliche Modelle hat, auch ein unendliches Modell besitzt.

Geben Sie auch einen Satz an, der endliche und unendliche Modelle hat, aber keine beliebig grossen Modelle.

(E5.3)

Ein Pfad in einem Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Sequenz $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ von Knoten, so dass

$$x_i E x_{i+1}$$

für alle $i < n$. Der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle Paaren von Knoten (x, y) einen Pfad $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ gibt, mit $x = x_0$ und $y = x_n$.

Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge Γ in der Sprache der Graphen gibt, so dass $\mathcal{G} \models \Gamma$ genau dann wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist.

(E5.4)

Betrachten Sie die folgende Theorie $\mathcal{T}$:

(i) Die Sprache $L(\mathcal{T})$ von $\mathcal{T}$ hat Konstanten 0 und 1, ein zweistelliges Funktionssymbol $+$, ein einstelliges Funktionssymbol $2^{(-)}$ und ein einstelliges Predikatsymbol I (Intuition: $I(x)$ bedeutet "x ist eine (erreichbare) natürliche Zahl").

(ii) Die nicht-logischen Axiome von $\mathcal{T}$ sind:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, y + 0 = y,$$
$$2^0 = 1, 2^x + 2^x = 2^{1+x},$$
$$I(0), I(x) \rightarrow I(1 + x).$$

(a) Sei 2_k induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} 2_0 &= 0, \\ 2_{k+1} &= 2^{2_k}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{T}$ mit einem Beweis einer in k linearen Tiefe beweist, dass

$$\mathcal{T} \vdash I(2_k).$$

Hinweis: definieren Sie induktiv Prädikate R_i:

$$\begin{aligned} R_0 &:= I, \\ R_{i+1} &:= \forall y(R_i(y) \rightarrow R_i(2^x + y)), \end{aligned}$$

und beweisen Sie mit Induktion über i, dass

$$\mathcal{T} \vdash R_i(0) \wedge \forall x(R_i(x) \rightarrow R_i(1 + x)).$$

(b) Sei $\forall x_0 \ldots \forall x_n \varphi(x_0, \ldots, x_n)$ der universelle Abschluss der Axiome von $\mathcal{T}$. In Aufgabe (a) haben Sie bewiesen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \vdash I(2_k) &\Leftrightarrow \vdash \forall x_0 \ldots \forall x_n \varphi(x_0, \ldots, x_n) \rightarrow I(2_k) \\ &\Leftrightarrow \vdash \exists x_0 \ldots \exists x_n(\varphi(x_0, \ldots, x_n) \rightarrow I(2_k)). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass wir für jede gültige Herbranddisjunktion von $\exists x_0 \ldots \exists x_n(\varphi(x_0, \ldots, x_n) \rightarrow I(2_k))$ mindestens 2_k Terme brauchen.