Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24. Juni, 2009

4. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E4.1)

(a) Zeigen Sie, dass man zu jeder Formel φ eine Formel φ^* in Negationsnormalform konstruieren kann, so dass $\varphi \equiv \varphi^*$.

(b) Sei φ eine Formel, worin x nicht vorkommt. Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi \to \exists x \psi(x) & \equiv & \exists x(\varphi \to \psi(x)) \\
\varphi \to \forall x \psi(x) & \equiv & \forall x(\varphi \to \psi(x)) \\
\exists x \psi(x) \to \varphi & \equiv & \forall x(\psi(x) \to \varphi) \\
\forall x \psi(x) \to \varphi & \equiv & \exists x(\psi(x) \to \varphi)
\end{array}$$

(E4.2)

$\preccurlyeq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preccurlyeq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \wedge x_4 \preccurlyeq x_2) \to x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big).$$

(a) Sei $\mathcal{A} = (A, \preccurlyeq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0, 1, 2\}$ und $\preccurlyeq^{\mathcal{A}} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,2)\}$. Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.

Hinweis:

(i) Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.

(ii) Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.

(iii) Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \wedge x_4 \preccurlyeq x_2) \to x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big)$$

äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

(E4.3)

Wir betrachten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x[\exists y(Rxy \land \neg\exists x Ryx) \lor \forall y \exists z(Rxz \land Rzy)]\\
\varphi_2 &:= \exists x[\forall y \neg Rxy \to \exists y \forall z(Rxy \land Rzy)]\\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y[Rxy \to \exists z(Rxz \land Rzy \land \neg\exists x(Rzx \land Rxz))]
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie äquivalente Formeln in Pränex-Normalform an.

(b) Wandeln Sie ihre Ergebnisse aus (a) in Skolem-Normalform um.

(c) Betrachten Sie die Formel $\varphi := \forall x \exists y Rxy$ und die Skolem-Normalform $\psi := \forall x Rxsx$.

  (i) Beweisen Sie, daß $\psi \models \varphi$ gilt.

  (ii) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass $\varphi \not\models \psi$.

(E4.4)

(a) Geben Sie für folgende FO-Formeln jeweils eine Skolemnormalform an:

  (i) $\forall x \exists y Rxy$

  (ii) $\forall x(\forall y Ryy \to \exists y Ryf(x))$

(b) Geben Sie einige verschiedene Herbrandmodelle für die Skolemnormalformen aus (a) an.