Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17. Juni, 2009

3. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E3.1)

Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

(E3.2)

Der Sequenzenkalkül wie in der Vorlesung vorgestellt enthält als Axiome die Instanzen von der Sequenz

$$\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$$

worin φ eine aussagenlogische Variable p ist. Beweisen Sie, dass Sie damit alle Instanzen von dieser Sequenz ableiten können.

(E3.3)

(a) Geben Sie eine FO-Formel an, die erfüllbar ist, aber nur unendliche Modelle hat.

(b) Geben Sie eine FO-Formel an, die besagt, dass die Trägermenge genau n Elemente enthält.

(c) Begründen Sie, warum die folgende Formel wahr ist.

$$\varphi = \exists x\,(\,Px \rightarrow \forall y P(y)\,).$$

(E3.4)

Betrachten Sie die Signatur $S = \{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$.

Zeigen Sie, dass in den folgenden S-Strukuren die Ordnung definierbar ist, d.h. dass es für jede der folgenden S-Strukturen $\mathcal{A}$ eine Formel ohne das $\leqslant$-Symbol $\varphi(x, y)$ gibt, so dass

$$a \leqslant^{\mathcal{A}} a' \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[a, a'].$$

(a) $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, \leqslant^{\mathbb{N}}, 0, 1)$

(b) $\mathcal{P} = (\mathcal{P}X, \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, X)$

(c) $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, \leqslant^{\mathbb{R}}, 0, 1)$

Extra: Überlegen Sie sich, warum die Ordnung der ganzen Zahlen (im Gegensatz zu (i)) nicht allein aus Addition und 0 definierbar sein kann.