Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Juni, 2009

2. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2009

(E2.1)

Seien φ und ψ AL-Formeln. Wie kann man das Resolutionsverfahren benutzen, um zu überprüfen, ob

(a) φ unerfüllbar ist;

(b) φ erfüllbar ist;

(c) φ allgemeingültig ist;

(d) φ nicht allgemeingültig ist;

(e) $\varphi \models \psi$;

(f) eine endliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist;

(g) eine unendliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist?

(E2.2)

Seien

$$\begin{aligned}\varphi &:= (p \vee q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)\\ \psi &:= (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r).\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass

(a) φ erfüllbar ist;

(b) $\varphi \models \psi$ gilt.

(E2.3)

(a) Für Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jedes Modell, das alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Eine Interpretation $\mathcal{I} : \mathcal{V} = \{p_1, p_2, \ldots\} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als eine unendliche Bit-Sequenz. P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, $\overline{P}$ das Komplement von P. Wir betrachten ein P, so dass sowohl P als auch $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$\begin{aligned} P &= \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \models \Phi\} \\ \overline{P} &= \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \models \Psi\} \end{aligned}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$.

Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ sogar schon durch einzelne AL-Formeln φ und ψ spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

(E2.4)

Wir betrachten folgenden Beweiskalkül von Shoenfield (1967) für das System $\{\neg, \vee\}$:

Axiome: $\neg\varphi \vee \varphi$

Regeln: $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\varphi \vee \varphi}{\varphi} \qquad \dfrac{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}{(\varphi \vee \psi) \vee \chi} \qquad \dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \neg\varphi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$

Wir schreiben $\Phi \vdash \psi$, falls es einen Beweisbaum gibt, dessen Blätter Axiome oder Aussagen in Φ sind und dessen Wurzel ψ ist. Beweisen Sie:

(a) $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$.

(b) $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (wie üblich betrachten wir $\varphi \to \psi$ als eine Abkürzung für $\neg\varphi \vee \psi$).

(c) $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vdash \psi$.

(d) $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$.

(e) $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$.