Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27. Mai, 2009

1. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008/2009

(E1.1)

Wir betrachten ein Netzwerk mit vier Ports (Ports 1, 2, 3 und 4), die jeweils entweder aktiv (A) oder inaktiv und entweder offen (O) oder geschlossen sind. Wir führen aussagenlogische Variablen p_{iA} ein für "Port i ist aktiv" und p_{iO} für "Port i ist offen". Formalisieren Sie folgende Aussagen in der Aussagenlogik:

(a) Wenn Port 1 offen ist, dann ist Port 2 offen oder Port 3 inaktiv.

(b) Ports 1 und 2 sind nicht beide aktiv.

(c) Höchstens zwei Ports sind offen.

(d) Von je drei Ports ist mindestens einer inaktiv.

(E1.2)

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee (\neg q \wedge r))$$

Ist die Formel erfüllbar? Ist sie allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine Formel zu folgender Wahrheitstafel an:

p	q	r	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn höchtens ein der Variablen p, q, r wahr ist.

(d) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r, s)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn genau drei der Variablen denselben Wert haben.

(E1.3)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen.

(i) $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \to \psi$.

(ii) Wenn $\varphi \models \psi$ und φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iii) Wenn $\varphi \models \psi$ und ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iv) $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ genau dann, wenn $\varphi \models \vartheta$ oder $\psi \models \vartheta$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen und Folgerungsbeziehungen.

(i) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

(ii) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

(iii) $\{\neg\psi, \psi \to \varphi\} \models \neg\varphi$

(iv) $\{\neg\varphi, \psi \to \varphi\} \models \neg\psi$

(E1.4)

Für $n \geqslant 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, \ldots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, daß

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat;

(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(c) jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder hat.