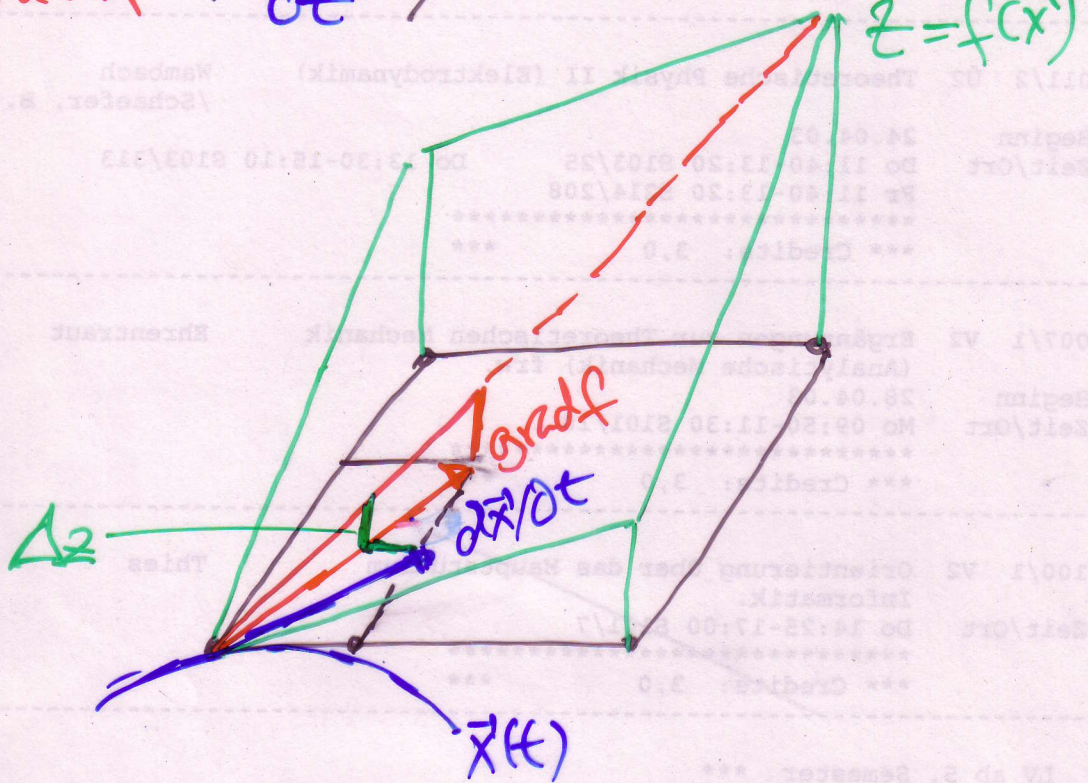


(7)

$$\left\langle \text{grad } f \mid \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right\rangle$$



Beweis  $f(\vec{x}) = z$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} + \frac{R(\Delta \vec{x}) \|\Delta \vec{x}\|}{\|\Delta \vec{x}\| \Delta t}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + 0$$

$$\frac{R(\Delta \vec{x})}{\|\Delta \vec{x}\|} \rightarrow 0 \quad \frac{\|\Delta \vec{x}\|}{|\Delta t|} \rightarrow \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right\| < \infty$$



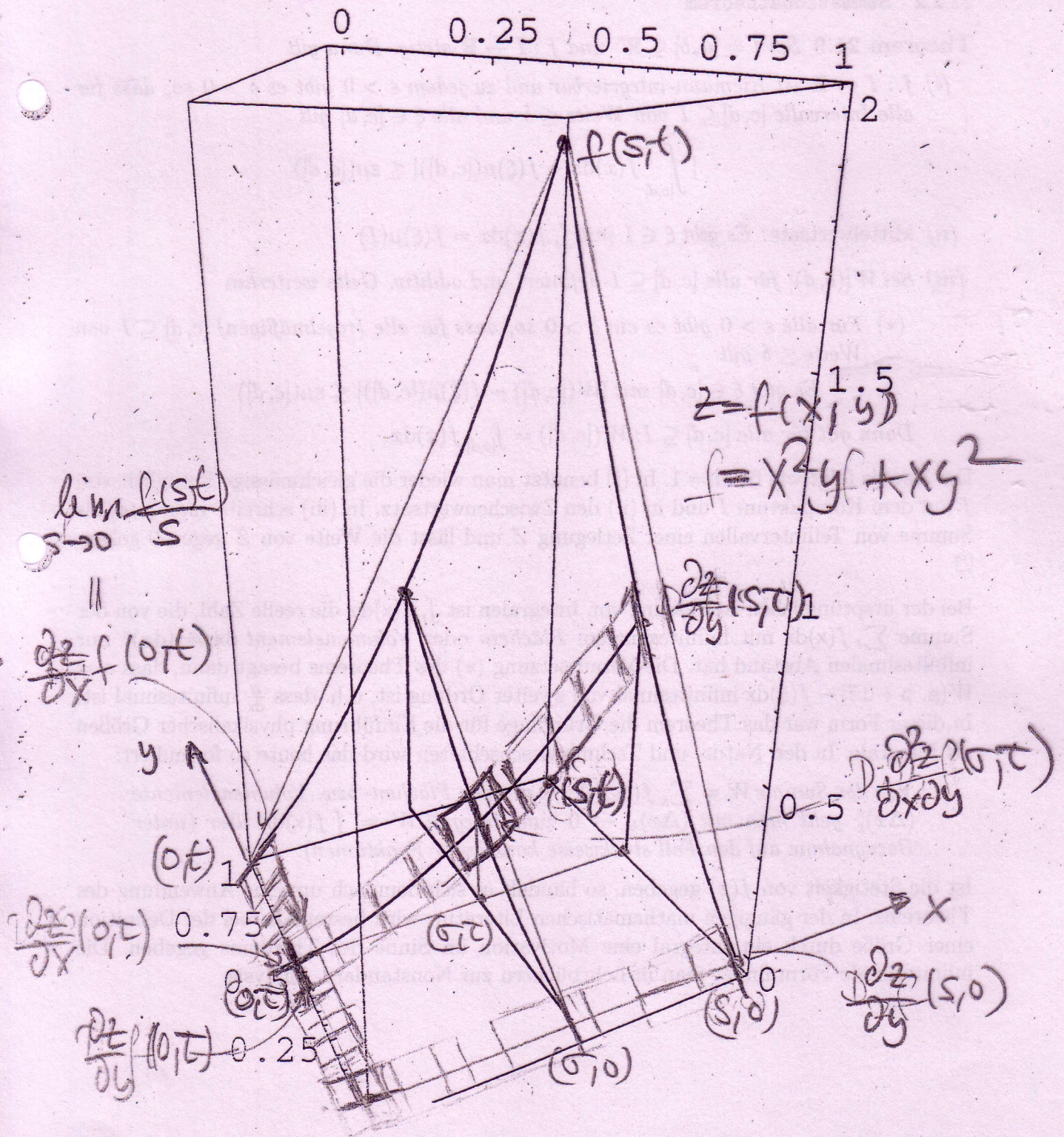
OBdA  $n=2, p=0$   $f(x,0) = f(0,y) = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  ex lokal stetig,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \rightarrow 0$   $(x,y) \rightarrow 0$

$$\frac{1}{t} \frac{f(st)}{s} = \frac{1}{s} \frac{f(st)}{t} = \frac{1}{s} \frac{\partial z}{\partial y}(s,t)$$

$$= D \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,t) \rightarrow 0 \quad \text{für } (s,t) \rightarrow 0$$

$$\text{also } (s,t) \rightarrow 0$$





d.h. man kann das Integral über die Funktion  $f(x) = 1$  darstellen. Wir können hierauf noch zurückkommen.

Die folgenden Eigenschaften des Integrals sind im Fall  $n = 1$  bekannt. Satz 21.5. Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über  $I$  integrierbar ist.

(a) Für beliebige  $a, b \in I$  gilt:

(b) Ist  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$ , so ist

(c) Ist  $f(x) \geq g(x)$  für alle  $x \in I$ , so ist

Lemma 21.8. Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und existiere  $\int_I f(x) dx$  so existiert auch  $\int_I \lambda f(x) dx$ .

Beweis. Beweis O.B.d.A.  $\lambda = 0$  für  $\lambda = 0$  ist trivial. Nun bemerke, dass jede Zerlegung von  $I$  eine Zerlegung von  $\lambda I$  ist.

Für Intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  im  $\mathbb{R}^1$  gilt

Lemma 21.7. Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über  $I$  integrierbar ist.

Lemma 21.6. Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über  $I$  integrierbar ist.

Lemma 21.5. Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über  $I$  integrierbar ist.

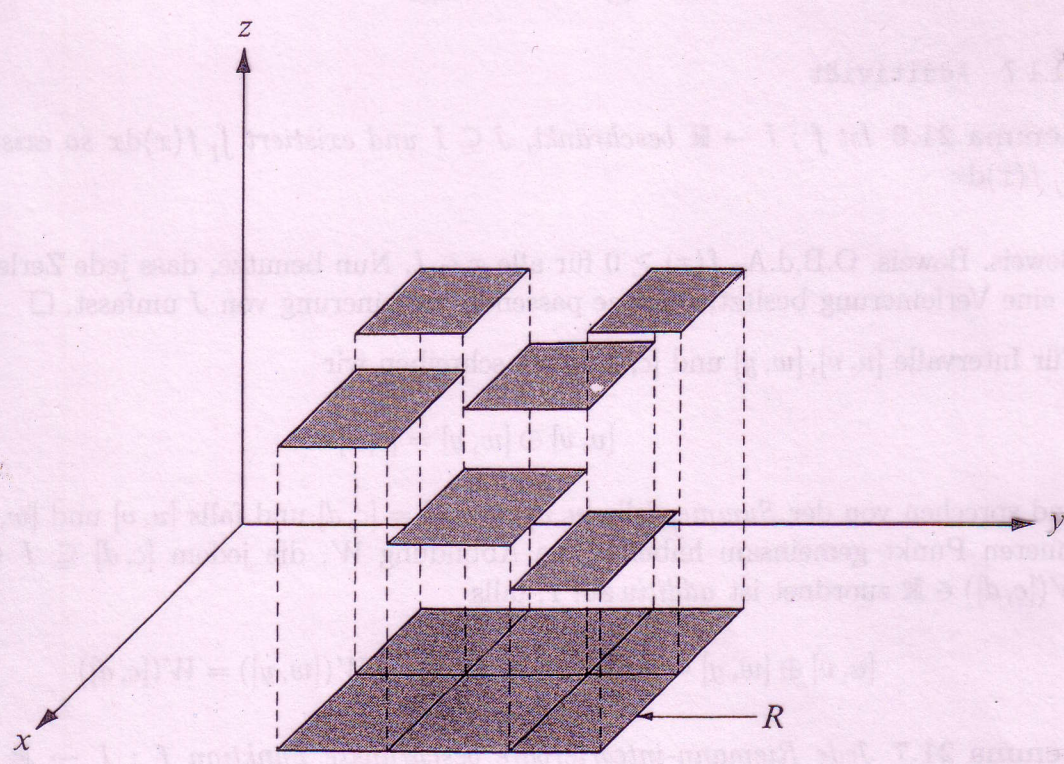
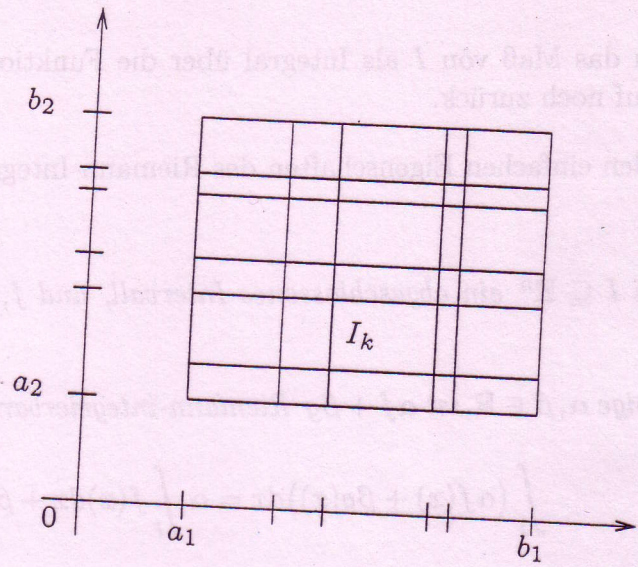


FIGURE 2.8 The graph of a step function defined over a rectangle  $R$ .



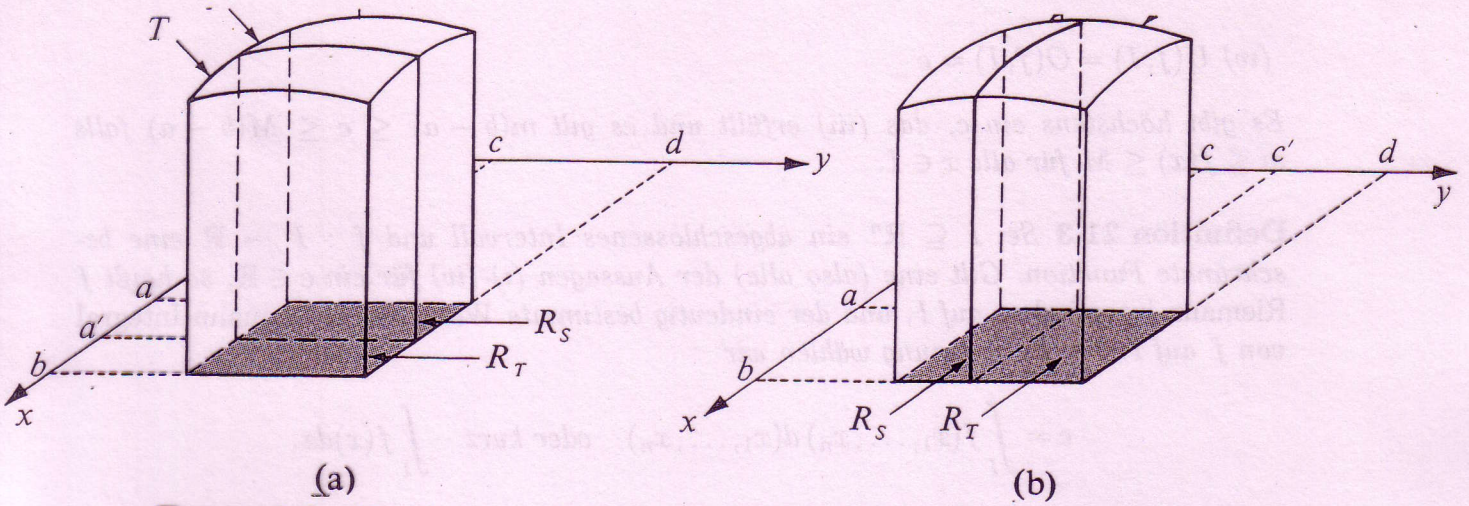


FIGURE 2.5 Verification of the additive property  $V(S \cup T) = V(S) + V(T)$ .



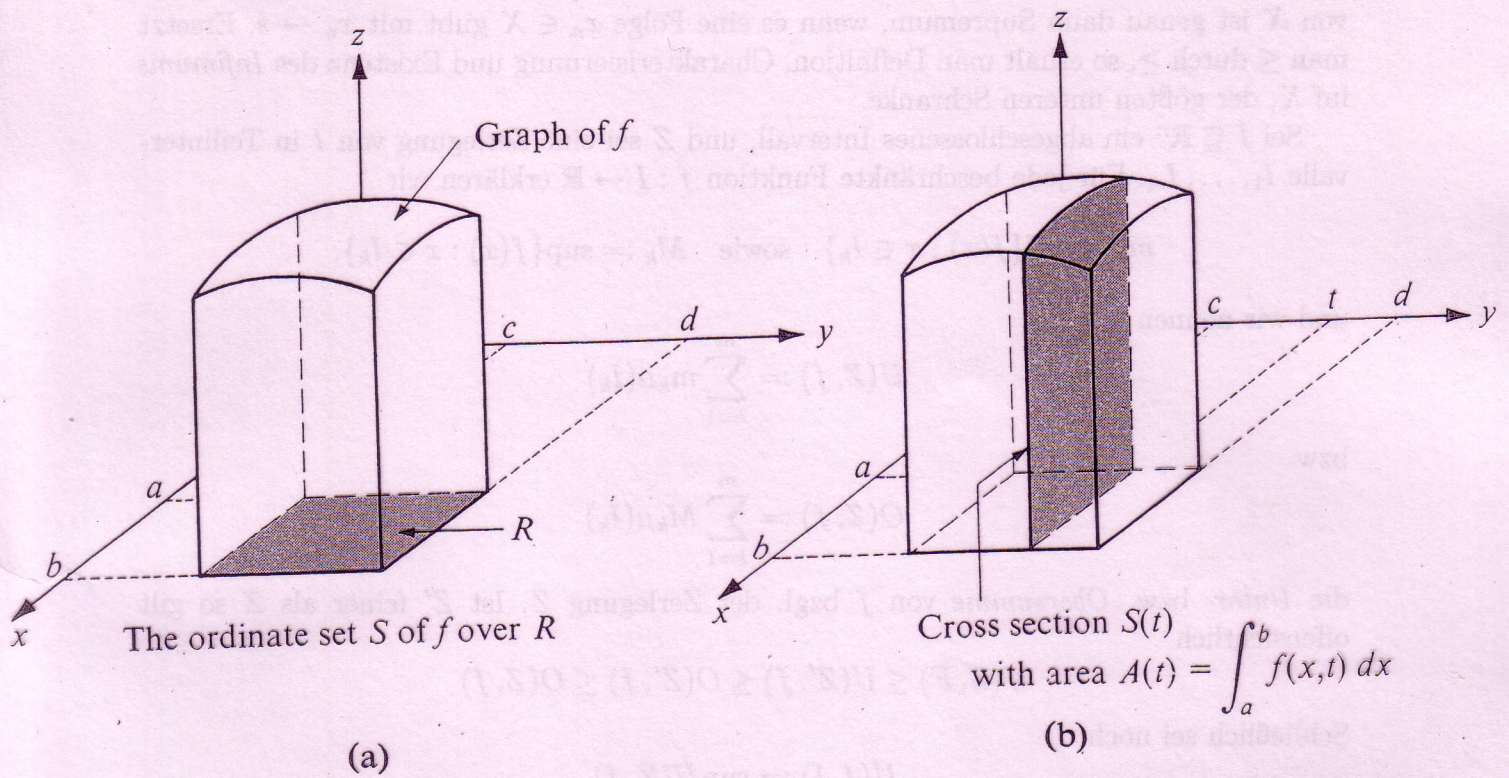


FIGURE 2.4 The volume of  $S$  is the integral of the cross-sectional area:  $V(S) = \int_c^d A(t) dt$ .